Komisja
Nadzoru
Finansowego

Piotr Śliwka

Czy rata mojego kredytu nie jest za wysoka?

Podstawy matematyki finansowej

Poradnik klienta usług finansowych

CEDUR

CEDUR

PORADNIK KLIENTA
USŁUG FINANSOWYCH

Piotr Śliwka

CZY RATA MOJEGO KREDYTU NIE JEST ZA WYSOKA?

PODSTAWY MATEMATYKI FINANSOWEJ

Warszawa 2013

Komisja
Nadzoru
Finansowego

Publikacja została wydana nakładem Komisji Nadzoru Finansowego

Pl. Powstańców Warszawy 1
00-030 Warszawa
www.knf.gov.pl

Warszawa 2013
Wydanie I

ISBN 978-83-63380-09-0

Nakład: 3000 szt.

Przygotowanie do druku i druk:
Agencja Reklamowo-Wydawnicza A. Grzegorczyk
www.grzeg.com.pl

SPIS TREŚCI

Wstęp

Dla wielu klientów usług finansowych kredyt i pożyczka to w uproszczeniu to samo. Jednak w kontekście prawno-finansowym różnice są dość istotne. Pożyczki udziela właściciel pieniędzy, kredytu natomiast udziela instytucja, która nie musi być właścicielem pieniędzy. Ponadto, pożyczkobiorca uzyskuje dostęp do pieniędzy lub przedmiotów materialnych i może dysponować nimi w zasadzie w dowolny sposób, w przeciwieństwie do kredytobiorcy, w przypadku którego instytucja kredytująca udostępnia środki płatnicze na konkretny cel i najczęściej przelewa odpowiednią kwotę bezpośrednio na konto podmiotu oferującego kredytowany produkt lub usługę. Co więcej: w kontekście prawnym pożyczka najczęściej dotyka obszaru prawa cywilnego (zazwyczaj udzielana przez osoby prywatne), kredyt natomiast dotyczy prawa bankowego (udzielany przez instytucje finansowe). Mimo tych różnic metody arytmetyki finansowej stosowane do obsługi zadłużenia zarówno w przypadku pożyczek, jak i kredytów pokrywają się. Celem niniejszego opracowania jest zaznajomienie czytelnika z pojęciami oraz metodami arytmetyki finansowej, które z jednej strony pozwalają samodzielnie ocenić dostępne na rynku oferty kredytowe pod kątem ich atrakcyjności z punktu widzenia potencjalnego kredytobiorcy, z drugiej natomiast zweryfikować ich wiarygodność na podstawie informacji dostępnych przed podpisaniem formalnej umowy o kredyt. W dalszej części tekstu, o ile nie będzie prowadziło to do nieporozumień, pojęcie pożyczka oraz kredyt zostaną utożsamione i zastąpione słowem kredyt. Ponadto dla uproszczenia rozważań – poza przykładem związanym z wyznaczeniem rzeczywistej rocznej stopy oprocentowania – w broszurze pominięto kwestię opłat związanych z obsługą kredytu, choć w praktyce banki i inne instytucje finansowe bardzo często pobierają od klientów dodatkowe opłaty i prowizje (np. opłatę przygotowawczą za rozpatrzenie wniosku o kredyt, opłatę za udzielenie kredytu, opłatę za dodatkowe czynności związane z obsługą kredytu itd.). Tego typu „dodatki" w sposób istotny zwiększają koszt kredytu i zazwyczaj są wliczane w wysokość raty, bądź stanowią dodatkowe płatności niezależne od wysokości raty. Zatem przed podpisaniem umowy należy zwrócić szczególną uwagę na wszystkie poboczne nakłady pieniężne zwiększające koszt kredytu.

PODSTAWOWE POJĘCIA CHARAKTERYZUJĄCE ZMIANĘ PIENIĄDZA W CZASIE

Pożyczanie kapitału i czerpanie z tego dodatkowych korzyści jest tak stare, jak stare jest istnienie handlu.

Na przestrzeni dziejów i w zależności od kręgu kulturowego różnie podchodzono do kwestii normujących wysokość oprocentowania. W Polsce międzywojennej np. oprocentowanie wypożyczonego kapitału nie mogło przekraczać 10%, gdyż w przeciwnym wypadku traktowane było jako lichwa. Podobne nastawienie do wysokości oprocentowania można spotkać w innych kulturach. Jednak panujące od pewnego czasu przekonanie, że „generatorem pieniędzy jest procent" wydaje się być obecnie powszechnie akceptowalne i usprawiedliwiające osiąganie z tego tytułu korzyści. W operacjach finansowych stopę procentową najczęściej traktuje się jako miarę zysku z posiadanego kapitału, który to kapitał jest udostępniony i używany przez innych. W teorii ekonomii stopę procentową wiąże się z wynagrodzeniem za powstrzymywanie się od konsumpcji bieżącej. Jest to oparte na założeniu, że gospodarstwa domowe preferują konsumpcję bieżącą, a zatem aby skłonne były zrezygnować z niej dziś, trzeba im tę powściągliwość wynagrodzić w postaci dodatkowej konsumpcji w przyszłości. W przypadku kredytów za stopę procentową przyjmuje się cenę, jaką ubiegający się o kredyt (kredytobiorca) musi zapłacić udzielającemu kredytu (kredytodawcy) za przywilej korzystania z pieniędzy udostępnionych przez kredytodawcę. Cena podana w jednostkach kapitału (wartość których może być wyrażona np. w złotówkach) jest wynagrodzeniem dla kredytodawcy za to, że w tym czasie nie dysponuje swoim kapitałem (pieniędzmi). W zależności od charakteru, kryterium i kontekstu, w jakim pojęcie stopy procentowej jest używane, wyróżnia się jej różne rodzaje. Do najczęściej występujących w odniesieniu do kredytów i pożyczek należą: roczna stopa procentowa (wysokość odsetek naliczanych od pożyczonego kapitału w okresie jednego roku), nominalna stopa procentowa (nie uwzględnia inflacji), realna stopa procentowa (nominalna stopa procentowa pomniejszona o inflację), efektywna stopa procentowa (uwzględnia odsetki naliczane w trakcie trwania inwestycji w ciągu roku, a w przypadku braku naliczania odsetek wewnątrz ustalonego okresu, np. roku, efektywna i nominalna stopa procentowa pokrywają się), rzeczywista stopa procentowa (uwzględnia dodatkowe opłaty związane z kredytem, np. prowizje, ubezpieczenia, marże,…, powszechnie występująca jako RRSO, czyli rzeczywista roczna stopa oprocentowania), stała (niezmienna w trakcie trwania umowy kredytowej) oraz zmienna stopa procentowa (kredytobiorca zgadza się na zmianę stopy w trakcie trwania umowy kredytowej). W dalszej części tekstu niektóre z nich zostaną szerzej wyjaśnione.

„Wzrost ryzyka najczęściej powoduje wzrost stopy procentowej i na odwrót: mniejsze ryzyko, to mniejsza stopa procentowa."

Jednym z głównych czynników wpływających na wysokość stopy procentowej jest ryzyko inwestycji, w stosunku do której ma ona zastosowanie. Wzrost ryzyka najczęściej powoduje wzrost stopy procentowej i na odwrót: mniejsze ryzyko, to mniejsza stopa procentowa.

Ważnym czynnikiem wpływającym na wysokość stopy procentowej jest także tzw. płynność. Najbardziej płynna jest gotówka (pożyczona np. od znajomych bądź w banku), zdecydowanie mniej płynna jest np. nieruchomość (dom, mieszkanie, itp.), w przypadku sprzedaży której czas od podjęcia decyzji o sprzedaży do momentu sprzedaży a następnie uzyskania pieniędzy jest dużo dłuższy, niż wspomniana wcześniej pożyczka pieniężna od znajomych. Generalnie, im płynniejsze są aktywa, tym niższa stopa procentowa zgodnie z ogólną zasadą finansów: mniejsza płynność wymaga wyższego wynagrodzenia.

„Im płynniejsze są aktywa, tym niższa stopa procentowa zgodnie z ogólną zasadą finansów: mniejsza płynność wymaga wyższego wynagrodzenia."

W powszechnym użyciu krąży stwierdzenie, iż „gotówka uzyskana dziś jest więcej warta niż gotówka uzyskana jutro". Ewentualna parafraza mogłaby wyglądać następująco: **ta sama kwota pieniędzy otrzymana dziś oraz za jakiś czas (np. za rok) nie posiada tej samej wartości**. Co najmniej dwie przyczyny uzasadniają powyższe stwierdzenie: występująca w procesach gospodarczych inflacja (zmniejszająca się wartość pieniądza w przyszłych okresach) oraz możliwość zainwestowania dzisiejszej gotówki z zyskiem odebranym np. za rok.

W tym drugim przypadku możliwość inwestowania gotówki w różnych momentach czasowych na różne długości okresów powoduje, iż wartość gotówki zmienia się w czasie. Do sprawdzenia, z jaką wartością gotówki będziemy mieli do czynienia za pewien okres albo ile dziś wynosi wartość gotówki, którą w przyszłości (po pewnym okresie) możemy otrzymać w znanej dziś wysokości, służą operacje: kapitalizacji odsetek i dyskontowania oraz pojęcia: wartość obecna i wartość przyszła. Wcześniej jednak niezbędne będzie wprowadzenie dwóch podstawowych zasad oprocentowania kapitału w ustalonym okresie „pracy" kapitału: zasady oprocentowania prostego oraz składanego. Na potrzeby niniejszego opracowania odsetki od kapitału będą:

„Do sprawdzenia, z jaką wartością gotówki będziemy mieli do czynienia za pewien okres albo ile dziś wynosi wartość gotówki, którą w przyszłości (po pewnym okresie) możemy otrzymać w znanej dziś wysokości, służą operacje: kapitalizacji odsetek i dyskontowania oraz pojęcia: wartość obecna i wartość przyszła."

- oznaczały procent tego kapitału wyrażony najczęściej w jednostkach pieniężnych (w skrócie j.p. lub PLN),
- naliczane po upływie tzw. okresu bazowego (lub podstawowego) oznaczającego zazwyczaj jeden rok (zmiana okresu bazowego z jednego roku na krótszy np. kwartał lub dłuższy np. okres 2-letni zostanie wyraźnie zaznaczona).

OPROCENTOWANIE PROSTE

Według zasady oprocentowania prostego odsetki od kapitału początkowego danej inwestycji są naliczane proporcjonalnie do długości trwania tej inwestycji.

Wkładając zatem kwotę początkową w wysokości 100 PLN na trzyletnią lokatę bankową oprocentowaną 10% w skali roku, po pierwszym roku dostaniemy 100 PLN + 10% * 100 PLN =110 PLN (po pierwszym roku odsetki wyniosą 10 PLN). Po drugim roku trwania lokaty poza kwotą początkową dostaniemy odsetki ponownie w wysokości 10% * 100 PLN = 10 PLN. Po trzecim roku, podobnie jak poprzednio, otrzymamy również dodatkowe 10 PLN. Pamiętając jednak o uzyskanych odsetkach w wysokości 20 PLN z poprzednich lat, ostateczna kwota na koniec trwania trzyletniej lokaty bankowej wyniesie 130 PLN. Zatem odsetki zarobione w trakcie trwania lokaty zostają dopisane do kwoty początkowej pod koniec inwestycji.

Formalizując podany przykład z oprocentowaniem prostym przyjmujemy, że K_0 oznacza kwotę początkową, jaką chcemy zainwestować na jeden okres, r oznacza stopę procentową obowiązującą w trakcie tej inwestycji oraz K_1 oznacza kwotę, jaką otrzymamy po upłynięciu tego okresu. Wówczas wysokość kwoty (wartość kapitału) K_1 wyniesie:

$$K_1 = K_0 + r\,K_0 = K_0\,(1 + r) \qquad (1.1)$$

gdzie

K_0 – kwota posiadana przed rozpoczęciem inwestycji,

K_1 – kwota uzyskana po pierwszym okresie inwestycji,

r – oprocentowanie obowiązujące w trakcie trwania inwestycji.

Po dwóch okresach inwestycji o tej samej długości i przy tej samej stopie procentowej r względem kapitału początkowego K_0 uzyskamy kwotę K_2 w wysokości:

$$K_2 = K_1 + r\,K_0 = K_0(1 + r) + r\,K_0 = K_0 + 2\,r\,K_0 = K_0\,(1+2r) \qquad (1.2)$$

Zatem w przypadku inwestycji trwającej n okresów i tych samych parametrach uogólniony wzór przyjmie postać:

$$\mathbf{K_n = K_{n-1} + r\,K_0 = \ldots = K_0(1 + (n-1)\,r) + rK_0 = K_0(1+nr) = K_0 + K_0\,nr} \qquad (1.3)$$

gdzie

K_0 – kwota początkowa inwestycji,

K_n – kwota uzyskana po n-tym okresie inwestycji,

r – oprocentowanie obowiązujące w trakcie trwania inwestycji,

n – liczba okresów inwestycji.

We wzorze (1.3) K_0nr oznacza wartość odsetek wyrażoną w jednostkach pieniężnych zainwestowanej kwoty, jaka zostanie wypłacona właścicielowi kwoty początkowej K_0 po upływie n okresów przy stałej stopie procentowej r. **Uwaga: dla wygody procent w obliczeniach numerycznych będziemy zapisywali w postaci ułamka dziesiętnego (w przykładach dotyczących stopy procentowej zazwyczaj z dokładnością do czterech cyfr po przecinku), o ile zapis ten nie będzie prowadził do nieporozumień.**

PROCENT SKŁADANY

Według zasady oprocentowania składanego odsetki od kapitału są naliczane i dodatkowo do tego kapitału doliczane na koniec każdego okresu, względem którego dane oprocentowanie obowiązuje.

Włożona zatem kwota początkowa 100 PLN na podobną, jak poprzednio, trzyletnią lokatę bankową oprocentowaną 10% w skali roku, ale przy założeniu, iż obowiązuje oprocentowanie składane, po pierwszym roku dostarczy dodatkowy zysk w wysokości 0.10 * 100 PLN = 10 PLN (po pierwszym roku wartość odsetek identyczna do uzyskanych w poprzednim przykładzie). Po drugim roku trwania lokaty dostaniemy odsetki w wysokości 0.10 * 110 PLN = 11 PLN, gdyż na początku drugiego roku inwestujemy już nie 100 PLN, lecz kwotę początkową z doliczonymi po pierwszym roku odsetkami, czyli 110 PLN. Po trzecim roku trwania lokaty otrzymujemy odsetki w wysokości 10% * 121 PLN = 12.10 PLN, co po dodaniu do wartości z poprzedniego okresu osiąga kwotę w wysokości 121+12.10 = 133.10 PLN na koniec trwania trzyletniej lokaty bankowej. Zatem odsetki zarobione w trakcie trwania lokaty dopisywane są do dotychczasowej kwoty na końcu okresu naliczania oprocentowania i uwzględniane przy oprocentowaniu w kolejnym okresie oprocentowania. W tym przypadku odsetki z zainwestowanej lokaty w wysokości 100 PLN wyniosły 33.10 PLN.

Analogicznie formalizując powyższy przykład z oprocentowaniem składanym i przyjmując, że inwestujemy kwotę K_0 na jeden okres, w trakcie którego oprocentowanie r nie zmienia się, po upłynięciu tego okresu wartość kwoty K_1 wyznaczamy z wzoru podobnego do (1.1):

$$K_1 = K_0 + r\,K_0 = K_0\,(1 + r) \tag{1.4}$$

Zatem przy inwestycji z identyczną i niezmienną w tym okresie stopą procentową zastosowanie oprocentowania typu prostego lub składanego po upływie jednego okresu dostarcza identyczną wartość kwoty K_1. Różnica między zastosowanymi typami oprocentowania uwidacznia się dopiero, gdy kwotę zainwestujemy na okres krótszy (np. ½ okresu bazowego) lub dłuższy (np. dwukrotność okresu bazowego) niż okres bazowy i przypisaną jemu stopę procentową. W takiej sytuacji po dwóch okresach inwestycji o tej samej długości i przy tej samej stopie procentowej r względem kapitału początkowego K_0 uzyskamy kwotę K_2 w wysokości:

$$K_2 = K_1 + r\,K_1 = K_1(1 + r) = K_0\,(1+r)\,(1+r) = K_0\,(1+r)^2 \tag{1.5}$$

Dla inwestycji trwającej n okresów i tych samych parametrach uogólniony wzór na wyznaczenie kwoty K_n po zakończeniu n-okresowej inwestycji na podstawie rekurencyjnej zależności przyjmie postać:

$$\mathbf{K_n = K_{n-1} + r\,K_{n-1} = K_{n-1}(1 + r) = K_{n-2}\,(1 + r)(1 + r) = \ldots = K_0\,(1+r)^n} \tag{1.6}$$

Przez analogię do (1.3) wartość odsetek można wyznaczyć odejmując we wzorze (1.6) od kwoty końcowej K_n zainwestowaną na początku inwestycji kwotę początkową K_0, czyli:

$$K_n - K_0 = K_0\,(1+r)^n - K_0 = K_0\,((1+r)^n - 1) = K_0\,(r^n + n\,r^{n-1} + \tfrac{1}{2}\,n\,(n-1)\,r^{n-2} + \ldots + \tfrac{1}{2}\,n\,(n-1)\,r^2 + nr) \tag{1.7}$$

przy czym:

K_0 – początkowa kwota inwestycji,

K_n – kwota uzyskana po n-tym okresie inwestycji,

r – oprocentowanie obowiązujące w trakcie trwania inwestycji,

n – liczba okresów inwestycji,

oraz współczynniki przy stopie procentowej r pochodzą z *dwumianu Newtona*[1]

[1] Symbol Newtona: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, gdzie n! oznacza iloczyn liczb od 1 do n: n!= n (n-1) … 2 1

Dwumian Newtona: $(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^1y^{n-1} + \binom{n}{n}y^n = \Sigma_{k=0}^{n} \binom{n}{k}x^ky^{n-k}$

„Procesem odwrotnym (w pewnym sensie) do kapitalizacji jest dyskontowanie. Dyskontowanie oznacza przeliczenie wartości kwoty na dziś, znając albo zakładając wartość, jaką kwota ta osiągnie w przyszłości.”

Przedstawiony wcześniej sposób dopisywania odsetek do kapitału początkowego nazywamy kapitalizacją odsetek. Uogólniając powyższe stwierdzenie, kapitalizacja oznacza, że dochody uzyskiwane w trakcie trwania inwestycji z zainwestowanego kapitału są dodawane do kapitału początkowego. Procesem odwrotnym (w pewnym sensie) do kapitalizacji jest dyskontowanie. Dyskontowanie oznacza przeliczenie wartości kwoty na dziś, znając albo zakładając wartość, jaką kwota ta osiągnie w przyszłości.

Jak wspomniano wcześniej wartość gotówki, którą posiadamy dziś w kwocie K i którą posiadaliśmy dwa lata temu bądź posiadać będziemy np. za rok w identycznej kwocie K bardzo często nie posiada już tej samej wartości. Podobnie rzecz ma się z ogólnie pojętym kapitałem, który może dotyczyć nie tylko pieniędzy zgromadzonych na rachunku bankowym, ale również pieniądza zamrożonego np. na rachunku papierów wartościowych bądź w nieruchomości (mieszkanie, dom jednorodzinny, działka,…). Powstaje wówczas problem porównania wartości tego samego kapitału, lecz „posiadanego” (również hipotetycznie) w różnych okresach. W związku z tym, aby możliwe było porównywanie wartości kapitałów z różnych okresów ustala się jeden wspólny moment w czasie i przelicza wartości kapitału z różnych okresów na ten wspólny moment. Pomocne w tym celu okazują się być stosowane w matematyce finansowej pojęcia: wartość obecna (ang. *present value*; w skrócie: PV) oraz wartość przyszła (ang. *future value*; FV), które – w zależności od kontekstu – dotyczą m.in. takich wielkości jak pieniądz, kapitał, inwestycja… Wartość obecna pozwala na przeliczenie wartości dobra z przyszłości na dziś (dyskontowanie). Wartość przyszła natomiast pozwala przeliczyć wartość dobra znanego dziś na ustalony moment w przyszłości np. za 2 lata (oprocentowanie). Pojęcie wartości obecnej można zilustrować następującym przykładem: jeśli na początku kwartału wiemy, że po jego upływie uzyskamy 100 PLN i znając np. prognozowaną inflację w tym kwartale, to chcielibyśmy wiedzieć, ile warta jest ta kwota dziś. Analogicznie: dysponując dziś kwotą 100 PLN i znając prognozowany poziom inflacji bądź poziom innego czynnika wpływającego na zmianę wartości pieniądza w ciągu najbliższego kwartału chcielibyśmy wiedzieć, jaką realną wartość 100 PLN będzie miało po jego upływie.

„Wartość obecna pozwala na przeliczenie wartości dobra z przyszłości na dziś (dyskontowanie). Wartość przyszła natomiast pozwala przeliczyć wartość dobra znanego dziś na ustalony moment w przyszłości np. za 2 lata (oprocentowanie).”

PODWAJANIE KAPITAŁU

Czasami nasuwa się pytanie: po jakim czasie gotówka „pożyczona” (bankowi bądź innej instytucji finansowej np. w postaci lokaty) podwoi się? Łatwo domyśleć się, że odpowiedź uzależniona jest od stopy procentowej obowiązującej w okresie, na jaki kwota została pożyczona. Jeśli stopa procentowa wynosi 0, to jasne, że nigdy wymarzonej dodatkowej kwoty nie otrzymamy. Natomiast w przypadku dostatecznie wysokiego oprocentowania taką kwotę możemy otrzymać w stosunkowo krótkim czasie (np. po upływie kilku dni). Zatem intuicja podpowiada, że **im niższa stopa**

procentowa, tym okres oczekiwania na podwojenie kapitału będzie dłuższy. Jak to policzyć? Wróćmy do oprocentowania prostego (wzór 1.3) oraz oprocentowania składanego (wzór 1.6) i przekształćmy je do takiej postaci, aby stosunek kapitału K_n oczekiwanego w przyszłości do kapitału początkowego K_0 był równy 2. W przypadku oprocentowania prostego otrzymujemy:

$$1 + nr = \frac{K_n}{K_0} = 2$$

stąd

$$n = \frac{2-1}{r} = \frac{1}{r} \tag{1.8}$$

Zatem liczba okresów w przypadku oprocentowania prostego, po których kapitał podwoi się ze stałą stopą procentową r wyniesie $n = \frac{1}{r}$. Rzeczywiście: jeśli zainwestowana kwota $K_0 = 100$ PLN przy stałej stopie procentowej r=10% w okresie bazowym i oprocentowaniu prostym, to kwotę końcową w wysokości 200 PLN uzyskamy po 10 okresach. Powyższą zależność możemy uogólnić na dowolną wielokrotność k kwoty początkowej K_0, czyli $n = \frac{k-1}{r}$.

W przypadku oprocentowania składanego sprawy się nieco komplikują: po odpowiednim przekształceniu wzoru (1.6) i przyjęciu, że $\frac{K_n}{K_0} = 2$ obydwie strony należy zlogarytmować[2].
Wówczas:

$$\ln(2) = \ln(1+r)^n$$

skąd

$$n = \frac{\ln(2)}{\ln(1+r)} \tag{1.9}$$

Inwestując kwotę $K_0 = 100$ PLN ze stałym oprocentowaniem r=10%, ale składanym po każdym okresie bazowym kwotę 200 PLN otrzymamy po $n = \frac{\ln(2)}{\ln(1+0,1)} \approx 7.27$ okresów, czyli zgodnie z przewidywaniami szybciej, niż w przypadku oprocentowania prostego. Uogólniając (1.9) na dowolną liczbę k wielokrotności kapitału K_0 uzyskujemy: $n = \frac{\ln(k)}{\ln(1+r)}$.

Do tej pory posługiwaliśmy się nominalną stopą procentową przyjmując, że obowiązuje ona w okresie bazowym oprocentowania i nie zmienia się w trakcie trwania inwestycji. W przypadku lokat bankowych (ale nie tylko) bardzo często bank podaje informację o nominalnej rocznej stopie procentowej, ale z możliwością kapitalizowania odsetek np. co kwartał lub co pół roku. **Jeśli naliczanie odsetek ma miejsce częściej, niż raz na koniec okresu bazowego, to mówimy wówczas o kapitalizacji niezgodnej, która odbywa się w okresach tzw. konwersji.** W sytuacji, kiedy okres konwersji oraz bazowy nie pokrywają się, wygodniej jest posługiwać się efektywną stopą procentową (oznaczaną jako r_{ef}). Efektywna stopa procentowa różni się od stopy nominalnej tym, że uwzględnia naliczane odsetki w okresach konwersji i na koniec okresu bazowego zastosowanego

2 Logarytmowanie jest operacją odwrotną do potęgowania. Logarytm przy podstawie *a* z liczby *b* ($\log_a b$) oznacza liczbę *c*, będącą potęgą, do której podstawa *a* musi być podniesiona, aby dać liczbę *b*, czyli:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b.$$

Zatem logarytmowanie można określić jako „zgadywanie”, do której potęgi (*c*) należy podnieść podstawę logarytmu (*a*), aby otrzymać liczbę *b*. Logarytmem naturalnym (ln) jest logarytm, którego podstawą jest liczba *e* równa w przybliżeniu 2,7183. Większość obecnych kalkulatorów jest wyposażona w funkcje logarytmowania przy dowolnej podstawie (w szczególności przy podstawie *e*) oraz potęgowania.

„Efektywna stopa procentowa różni się od stopy nominalnej tym, że uwzględnia naliczane odsetki w okresach konwersji i na koniec okresu bazowego zastosowanego do K_0 podaje faktyczną kwotę, czyli powiększoną o odsetki doliczane po kolejnych okresach konwersji."

do K_0 podaje faktyczną kwotę, czyli powiększoną o odsetki doliczane po kolejnych okresach konwersji. Jeśli okres konwersji oraz okres bazowy pokrywają się, wówczas stopa nominalna oraz efektywna są identyczne. W przypadku, kiedy odsetki naliczane są m-krotnie wewnątrz okresu bazowego (okres bazowy jest m-krotnością okresu konwersji) wprowadza się dodatkowe oznaczenie na nominalną stopę procentową $r^{(m)}$, która podlega konwersji wewnątrz okresu bazowego. Formalnie efektywną stopę procentową wyznaczamy z zależności między nominalną (r) i równoważną jej efektywną (r_{ef}) stopą procentową w tym samym okresie bazowym, korzystając z (1.6). Przyjmując, że w trakcie $\frac{1}{m}$ okresu bazowego K_0 wzrośnie o $K_0\frac{r^{(m)}}{m}$, to po jednym okresie K_1 wyniesie

$$K_1 = K_0\left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^m$$

natomiast po n okresach:

$$\mathbf{K_n = K_0\left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^{nm}} \qquad (1.10)$$

gdzie
K_0 – początkowa kwota inwestycji,
K_n – kwota uzyskana po n-tym okresie inwestycji,
$r^{(m)}$ – oprocentowanie obowiązujące w jednym okresie bazowym,
n – liczba okresów inwestycji,
m – liczba podokresów w okresie bazowym (np. liczba miesięcy, kwartałów, półroczy,…, w jednym roku utożsamionym z okresem bazowym).

Zatem równoważność kapitałów po upływie jednego okresu bazowego w przypadku zastosowania stopy nominalnej r oraz stopy nominalnej $r^{(m)}$ m-krotnie konwertowanej pozwala na wyznaczenie efektywnej stopy procentowej r_{ef}:

$$K_0(1 + r) = K_0\left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^m,$$

skąd

$$\mathbf{r_{ef} = \left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^m - 1} \qquad (1.11)$$

gdzie
$r^{(m)}/m$ – oprocentowanie obowiązujące w m-tej części okresu bazowego,
m – liczba podokresów w okresie bazowym (np. liczba miesięcy, kwartałów, półroczy,…, w jednym roku, jeśli rok utożsamiono z okresem bazowym).

Przykład

Bank oferuje lokatę na rok w trzech wariantach:

a) oprocentowanie w okresie bazowym wynosi 10% i odsetki naliczane są na koniec okresu bazowego (okresy: konwersji oraz bazowy pokrywają się),

b) oprocentowanie w okresie bazowym wynosi 9%, ale odsetki naliczane i kapitalizowane są co pół roku (okres bazowy jest 2-krotnością okresu konwersji),

c) oprocentowanie w okresie bazowym wynosi 8%, ale odsetki naliczane i kapitalizowane są co kwartał (okres bazowy jest 4-krotnością okresu konwersji).

Która z lokat będzie korzystniejsza dla klienta?

Rozwiązanie

Na pierwszy rzut oka nie bardzo wiadomo, która z nich jest atrakcyjniejsza. W przypadku a) sytuacja jest prosta: wkładamy 100 PLN na rok i po roku dostajemy 110 PLN. W przypadku b) oprocentowanie jest niższe, ale odsetki zarobione wewnątrz okresu bazowego są kapitalizowane co pół roku, czyli $r_2 = 9\% / 2 = 4{,}5\%$*. Przyjmując* $n=2$ *półrocza otrzymujemy:*

$100\,(1+r_n)^n = 100\,(1+r/n)^n = 100\,(1+0{,}045)^2 \approx 109{,}20$ *PLN.*

W przypadku c) oprocentowanie jest najniższe, ale odsetki zarobione wewnątrz okresu bazowego kapitalizowane są co kwartał, czyli $r_4 = 8\% / 4 = 2\%$*, skąd*

$100\,(1+r_n)^n = 100\,(1+0{,}02)^4 \approx 108{,}24$ *PLN.*

Zatem, pomimo naliczania odsetek wewnątrz okresu bazowego i doliczania ich do kwoty początkowej lokata c) jest najmniej opłacalna w stosunku do pozostałych. Oczywiście przy założeniu jednakowych stóp procentowych sposób naliczania odsetek w lokacie c) będzie korzystniejszy w stosunku do b) i tym bardziej do a). W sytuacji, kiedy do wyboru mamy kilka propozycji z różnymi poziomami stóp procentowych i różną kapitalizacją odsetek, przydatna do porównań okazuje się być wtedy właśnie efektywna stopa procentowa. W powyższym przykładzie stopy efektywne (r_{ef}*) wynoszą odpowiednio:*

a) $r_{ef} = 10\%$ *,*

b) $r_{ef} = (1+9\% / 2)^2 - 1 = 9{,}2025\%$*,*

c) $r_{ef} = (1+8\% / 4)^4 - 1 = 8{,}2432\%$*.*

Zgodnie z wcześniejszą diagnozą r_{ef} *wariant a) daje klientowi najwyższą wartość odsetek.*

RACHUNEK RENT

Przez rentę w potocznym tego słowa znaczeniu zazwyczaj rozumie się regularnie (np. raz w miesiącu) otrzymywane na rachunek bankowy świadczenie rentowe lub emerytalne z Zakładu Ubezpieczeń Społecznych lub innej instytucji finansowo-ubezpieczeniowej. W obszarze finansów (również w matematyce finansowej i ubezpieczeniowej) pojęcie renty ma zdecydowanie bardziej uniwersalny charakter i zazwyczaj tę uniwersalność podkreśla się poprzez dodanie przymiotnika „matematyczna”, czyli renta matematyczna. Jednak w dalszych rozważaniach będziemy posługiwać się tylko pojęciem „renta” , o ile nie będzie to prowadziło do nieporozumień.

Każdy ciąg płatności okresowych (wpłat, wypłat) o jednakowej lub różnej wartości, ale mających miejsce w równych odstępach czasu (np. co miesiąc, co rok,…) nazywamy rentą (ang. annuity). Równe odstępy pomiędzy kolejnymi przepływami pieniężnymi (ratami renty) nazywamy okresem bazowym renty. Rentą zatem można nazwać ciąg spłaty pożyczki bądź rat kredytu, ciąg wpłacanych składek ubezpieczeniowych związanych z obowiązkowym ubezpieczeniem OC samochodu lub mieszkania, miesięczny czynsz, również wspomniany wcześniej ciąg świadczeń emerytalnych regularnie przynoszonych przez listonosza bądź przelewanych przez ZUS na konto. W pewnym sensie rentą można również nazwać wypłatę przez pracodawcę stałego, comiesięcznego wynagrodzenia pracownikowi.

„Każdy ciąg płatności okresowych (wpłat, wypłat) o jednakowej lub różnej wartości, ale mających miejsce w równych odstępach czasu (np. co miesiąc, co rok,…) nazywamy rentą (ang. annuity).”

W zależności od dodatkowych założeń i kryteriów przyjętych względem renty matematycznej wyróżnia się jej kilka typów. Jeśli kryterium stanowi długość trwania renty, to najczęściej wyróżnia się rentę pewną oraz rentę wieczystą. W przypadku terminu płatności w okresie (na początku lub na końcu), to zazwyczaj rozróżnia się rentę płatną z góry oraz płatną z dołu. Natomiast jeśli kryterium stanowi moment wyceny renty (równoważnej tworzącemu ją kapitałowi), to mówimy o wartości początkowej lub końcowej renty. Wprowadzone pojęcia szerzej wyjaśnimy w dalszej części rozdziału.

Rentą pewną nazywamy ciąg płatności (rat) w ustalonych (np. 10-tego każdego miesiąca) i równoodległych (np. miesiąc) terminach płatności przez określoną na początku uruchomienia renty liczbę n okresów (np. n = 36 miesięcy). Zatem renta pewna powinna być przez n okresów wypłacana pobierającemu bez względu na okoliczności (np. przedwczesna śmierć osoby pobierającej, o ile nie zawarto odrębnych klauzul regulujących taki przypadek).

Rentą wieczystą nazywamy ciąg płatności (rat) w ustalonych (np. 10-tego każdego miesiąca) i równoodległych (np. miesiąc, kwartał) terminach płatności przez nieskończoną liczbę okresów. Renta wieczysta znajduje swoje zastosowanie w pewnych typach świadczeń związanych z ubezpieczeniami na życie, w których moment śmierci nie jest znany i tym samym moment zakończenia wypłaty świadczenia nie jest precyzyjnie określony.

Rentę – w szczególności związane z nią płatności – najczęściej charakteryzują następujące wielkości:
- w przypadku renty skończonej: okres, w jakim płatności są dokonywane (zwany czasem trwania renty) lub liczba rat,
- wartość każdej raty (jeśli nie są stałe w okresie trwania renty),
- odległość w czasie między kolejnymi płatnościami (np. miesiąc, kwartał, rok,…) zwana okresem renty,
- termin płatności pierwszej (ewentualnie ostatniej) raty.

Renty również dzieli się ze względu na moment płatności, który w trakcie okresu bazowego może przypadać na jego początek lub koniec. W tym pierwszym przypadku rentę nazywamy płatną z góry, w drugim natomiast płatną z dołu.

Renty w obszarze finansów i ubezpieczeń zazwyczaj służą do:
- zgromadzenia takiej kwoty pieniężnej przy założeniu stałych wpłat o określonym typie i wielkości oprocentowania, aby suma płatności stałych rat wraz z odsetkami była równa kwocie założonej na początku (np. fundusz emerytalny lub fundusz amortyzacyjny, o którym szerzej w rozdziale pt. „Metody wyznaczania rat kredytu (…)"),
- określenia kwoty pieniędzy, która zostanie zainwestowana i wraz z zarobionymi odsetkami zapewni serię płatności w ustalonej wysokości raty i ustalonym okresie.

W tym pierwszym przypadku mówimy o wartości przyszłej renty, w tym drugim o wartości obecnej renty.

W pierwszym przypadku wartość początkowa renty oznacza sumę przeliczonych na chwilę początkową wartości rat, w drugim przypadku natomiast – sumę wartości zaktualizowanych na koniec okresu trwania renty. Zazwyczaj do oceny równoważności np. kilku rent wykorzystujemy np. równość ich wartości początkowych.

RENTA PŁATNA Z DOŁU

Załóżmy, że interesuje nas zgromadzenie kapitału przy wpłatach o stałej wysokości R w ciągu n okresów na końcu każdego z nich. Mamy wówczas do czynienia z rentą płatną z dołu.
Pierwsza wpłata w wysokości R oprocentowana stopą r przez pozostałe n-1 okresów na koniec pierwszego wyniesie:

$$R(1+r)^{n-1}$$

gdzie
R – wysokość raty,
r – oprocentowanie obowiązujące w jednym okresie,
n – liczba okresów.

W momencie wpłaty drugiej raty do końca trwania renty pozostają n-2 okresy. Druga rata wpłacona pod koniec drugiego okresu oprocentowana będzie przez kolejne n-2 okresy. Zatem pod koniec n-tego okresu jej wartość osiągnie:

$$R(1+r)^{n-2}$$

Ostatnia wpłacona rata w wysokości R na koniec n-tego okresu wyniesie $R(1+r)^0=R$. Zatem wartość zgromadzonych pieniędzy na koniec n-tego okresu trwania renty wyniesie:

$$R(1+r)^{n-1} + R(1+r)^{n-2} + \ldots + R(1+r) + R = R((1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \ldots + (1+r) + 1)$$

Łatwo zauważyć, że po wyciągnięciu wspólnego czynnika R dostajemy sumę skończonego ciągu geometrycznego. Zastosowanie wzoru na sumę takiego ciągu ze stałym ilorazem q oraz wyrazem początkowym a zgodnie z wzorem (2.1):

$$s_n = a\frac{q^n-1}{q-1} \qquad (2.1)$$

i przyjęciu wartości raty R = 1 jednostce pieniężnej (j.p.) oraz q=1+r pozwala na podanie wartości końcowej renty oprocentowanej stopą r:

$$\mathbf{s_{\overline{n|}r} = \frac{(1+r)^n-1}{r}} \qquad (2.2)$$

gdzie
r – wysokość oprocentowania,
$s_{\overline{n|}r}$ – wartość renty płacącej 1 j.p. przy oprocentowaniu r przez n okresów na koniec każdego z tych okresów.

Zatem wartość końcowa renty płacącej R j.p. wyniesie $s_{\overline{n|}} = Rs_{\overline{n|}r}$. Tym samym, znając wartość końcową renty oraz oprocentowanie obowiązujące w trakcie jej trwania możemy wyznaczyć wysokość raty płatnej w okresie bazowym:

$$\mathbf{R = \frac{s_{\overline{n|}}}{s_{\overline{n|}r}}} \qquad (2.3)$$

gdzie
R – wysokość raty,
$s_{\overline{n|}r}$ – wartość renty płacącej 1 j.p. przy oprocentowaniu r przez n okresów na koniec każdego z nich.

Symboli $s_{\overline{n|}r}$ oraz $s_{\overline{n|}}$ powszechnie używamy do oznaczenia wartości końcowej renty płacącej odpowiednio 1 j.p. oraz R j.p.

Przykład

Jaką kwotę osiągniemy za 3 lata, jeśli na koniec każdego roku odkładamy 1000 PLN na koncie oprocentowanym 10% w skali roku?

Rozwiązanie

Wiedząc, że wysokość raty wynosi R = 1000 PLN przy oprocentowaniu r = 10% w ciągu n = 3 okresów wyznaczamy wartość końcową raty $s_{\overline{3|}}$*:*

$$s_{\overline{3|}} = R * s_{\overline{3|}0,1}\ 1000*3,31 = 3310 \text{ PLN}$$

Zatem, odkładana co rok kwota 1000 PLN wygeneruje stan oszczędności, który równy będzie wartości końcowej renty płatnej z dołu, czyli 3310 PLN.

Przykład

Za 3 lata potrzebujemy kwoty 10 000 PLN. Bank oferuje konto systematycznego oszczędzania oprocentowane miesięcznie 1% z kapitalizacją miesięczną. Jaką ratę równej wielkości powinniśmy wpłacać co miesiąc, aby osiągnąć powyższą kwotę?

Rozwiązanie

Wiedząc, że r = 1%, n=36 okresów oraz $s_{\overline{36|}} = 10\,000$ *PLN wyznaczamy wartość końcową renty* $s_{\overline{36|}0,01}$:

$$s_{\overline{36|}0,01} = \frac{(1+0,01)^{36}-1}{0,01} = 43,0769$$

Korzystając ze wzoru (2.3) wysokość raty $R = \dfrac{10\,000}{43,0769} = 232,14$ *PLN. Rzeczywiście odkładając co miesiąc 232,14 PLN przy oprocentowaniu r = 1% składanym miesięcznie po 36 miesiącach uzyskujemy 10 000 PLN:*

$$232,14 + 232,14*(1+0,01) + 232,14*(1+0,01)^2 + \ldots + 232,14*(1+0,01)^{35} = 10\,000.$$

Podobnie wyznaczamy aktualną wartość ciągu n płatności w trakcie n okresów zwaną także wartością obecną renty n-okresowej ze stałą ratą R i stałym oprocentowaniem r. Ponownie rozważamy rentę płatną z dołu (w chwilach 1, 2,…,n). Wpłacona 1 j.p. na koniec pierwszego okresu ma w chwili obecnej (chwila 0, czyli na początku tego okresu) wartość równą $\frac{1}{r+1} = v$, gdzie v oznacza czynnik dyskontujący. Wpłacona w drugim okresie kolejna 1 j.p. i przeliczona na chwilę 0 (zdyskontowana) będzie równa $\left(\frac{1}{r+1}\right)\frac{1}{r+1} = v^2$. Zatem wpłacona 1 j.p. w n-tym okresie obecnie warta jest v^n. Uwzględniając wszystkie n płatności, jakich w tym okresie dokonujemy, aktualna wartość serii płatności z dołu wyniesie:

$$\mathbf{a_{\overline{n|}r} = v + v^2 + \ldots + v^n} \tag{2.4}$$

Ponowne zastosowanie wzoru na sumę ciągu geometrycznego (2.1) skraca zapis w (2.4) do:

$$a_{\overline{n|}r} = v\,\frac{v^n-1}{v-1} = \frac{1}{r+1}\,\frac{\left(\frac{1}{1+r}\right)^n-1}{\frac{1}{1+r}-\frac{1+r}{1+r}} = \frac{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^n}{r} = \frac{1-v^n}{r} \tag{2.5}$$

gdzie

r – oprocentowanie w jednym okresie,

v – współczynnik dyskonta związany ze stopą procentową r,

$a_{\overline{n|}r}$ – wartość obecna renty płacącej 1 j.p. przy stopie procentowej r przez n okresów.

Wartość zaktualizowanych na początek okresu płatności z dołu w wysokości R j.p. wyniesie $a_{\overline{n|}} = Ra_{\overline{n|}r}$. Użyte symbole $a_{\overline{n|}r}$ oraz $a_{\overline{n|}}$ oznaczają wartości obecne renty płatnej z dołu w przypadku płatności odpowiednio: 1 j.p. oraz R j.p. Analogicznie do wzoru (2.3) znając $a_{\overline{n|}}$ oraz $a_{\overline{n|}r}$ możemy podać wartość raty R

$$\mathbf{R = \frac{a_{\overline{n|}}}{a_{\overline{n|}r}}} \tag{2.6}$$

gdzie

$a_{\overline{n|}r}$ – wartość obecna renty płacącej 1 j.p. przy stopie procentowej r przez n okresów,

$a_{\overline{n|}}$ – wartość obecna renty płacącej R j.p. przy stopie procentowej r przez n okresów.

Przykład

Firma ubezpieczeniowa oferuje 65-latkom rentę „Luksus na starość", w ramach której wypłaca przez 15 lat na koniec każdego roku kwotę w wysokości 12 000 PLN. Jaką kwotą pieniędzy należy dysponować na początku uruchomienia renty, aby przy oprocentowaniu 6% w skali roku zrealizować zamierzone wypłaty?

Rozwiązanie

Znamy kwotę, jaką będziemy chcieli wypłacać przez n=15 lat na koniec każdego roku w wysokości R=12 000 PLN przy oprocentowaniu rocznym r=6%. W takiej sytuacji wartość obecna renty płacącej 1 j.p. przez 15 lat przy oprocentowaniu 6% rocznie wyniesie:

$$a_{\overline{15}|6\%} = \frac{1-\left(\frac{1}{1+0,06}\right)^{15}}{0,06} = 9,712249.$$

Do zrealizowania zamierzeń firmy należy zatem zabezpieczyć:

$$a_{\overline{15}|} = Ra_{\overline{15}|6\%} = 12\ 000 * 9,712249 = 116\ 547 \text{ PLN.}$$

Jeśli renta w wysokości R jest płatna m razy w ciągu jednego okresu konwersji stopy procentowej (okresem konwersji może być np. 1 rok) przez n okresów konwersji i każdorazowo na koniec podokresu, wówczas pojedyncza rata R_m wyniesie $R_m = \frac{R}{m}$. Wartość obecną renty płatnej z dołu można w takim przypadku zapisać wzorem (2.7):

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{R}{m}\left(v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \ldots + v^{\frac{m}{m}} + v^{2\frac{1}{m}} + v^{2\frac{2}{m}} + \ldots + v^{n\frac{m-1}{m}} + v^{n}\right) = \tag{2.7}$$

$$= \frac{R}{m}\left(\frac{v^{\frac{1}{m}} - v^{n+\frac{1}{m}}}{1-v^{\frac{1}{m}}}\right) = \frac{R}{m}\left(\frac{1-v^{n}}{(1+r)^{\frac{1}{m}}-1}\right) = R\left(\frac{1-v^{n}}{r^{(m)}}\right)$$

gdzie m oznacza liczbę płatności w jednym okresie konwersji stopy procentowej, n jest terminem renty mierzonym liczbą okresów konwersji stopy procentowej oraz każdy okres konwersji stopy procentowej jest wielokrotnością liczby okresów płatności (m i n są liczbami naturalnymi i większymi od 0).

Między wartościami obecnymi rent m-krotnie płacącej z dołu w okresie konwersji $a_{\overline{n}|}^{(m)}$ oraz płatnej z dołu w jednym okresie $a_{\overline{n}|}$ istnieje ścisły związek, który pozwala na przeliczenie jednego typu renty na drugi:

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{r}{r^{(m)}}\, a_{\overline{n}|}$$

W podobny sposób wyznaczamy wartość zakumulowaną powyższej renty tuż po ostatniej płatności:

$$s_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}(1+r)^{n} \tag{2.8}$$

$$s_{\overline{n}|}^{(m)} = a_{\overline{n}|}^{(m)}(1+r)^{n} = R\,\frac{(1+r)^{n}-1}{r^{(m)}}$$

również korzystając z zależności między $s_{\overline{n}|}^{(m)}$ a $s_{\overline{n}|}$:

$$s_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{r}{r^{(m)}}\, s_{\overline{n}|}$$

gdzie

m – liczba płatności w jednym okresie konwersji stopy procentowej,

n – termin renty mierzony liczbą okresów konwersji stopy procentowej (każdy okres konwersji stopy procentowej jest wielokrotnością liczby okresów płatności),

r – obowiązująca w okresie bazowym stopa procentowa,

$r^{(m)}$ – obowiązująca w m-tym okresie bazowym stopa procentowa,

$s_{\overline{n|}}^{(m)}$ – zakumulowana wartość renty n-okresowej z uwzględnieniem m konwersji w jednym okresie bazowym,

$s_{\overline{n|}}$ – zakumulowana wartość renty n-okresowej.

W przypadku zmiennego oprocentowania r_j obowiązującego w każdym k-tym okresie, które dodatkowo może zmieniać się również w podokresach k-tego okresu i założeniu stałej raty w k-tym okresie uogólniony wzór na wartość renty K płatnej z dołu przyjmie postać podaną w (2.9):

$$K = \sum_{k=1}^{n} R_k \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1+r_j} \tag{2.9}$$

Zakładając dodatkowo, że stopa procentowa w tym okresie jest stała ($r_j=r$) oraz raty we wszystkich okresach są stałe ($R_k=R$) postać (2.9) upraszcza się do wzoru (2.10)

$$K = R\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+r)^k} \tag{2.10}$$

który pokrywa się z $a_{\overline{n|}r}$ we wzorze (2.5) po podzieleniu przez R i w którym:

r_j – stopa procentowa w j-tym okresie,

r – stała stopa procentowa we wszystkich okresach,

R_k – wartość raty w k-tym okresie,

R – stała wartość raty we wszystkich okresach,

K – wartość renty n-okresowej ze stałymi R bądź zmiennymi R_j wysokościami raty w podokresach.

RENTA PŁATNA Z GÓRY

Analogicznie, jak w przypadku renty płatnej z dołu, wyznaczamy wartość końcową (skumulowaną) oraz wartość aktualną (obecną) renty płatnej z góry. W przypadku renty płatnej z góry wspomniana płatność ma miejsce na początku okresu, w przeciwieństwie do poprzedniego przypadku. Zatem modyfikacja wzorów (2.2) oraz (2.5) sprowadzi się w pewnym sensie do „przesunięcia" liczby okresów o jeden wstecz. Wpłacając ratę w wysokości R na początku pierwszego okresu bazowego jej wartość zostanie oprocentowana przez n okresów, wpłacając kolejną ratę w drugim okresie bazowym zostanie ona oprocentowana przez n-1 okresów, itd. Ostatecznie wpłacona n-ta rata zostanie oprocentowana przez ostatni okres bazowy. Stąd suma rat gromadzonych w kolejnych okresach wyniesie:

$$R(1+r)^n + R(1+r)^{n-1} + \ldots + R(1+r) = R(1+r)\,[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \ldots + 1]$$

czyli

$$\ddot{s}_{\overline{n|}r} = R(1+r)\,\frac{(1+r)^n-1}{r} \tag{2.11}$$

Podobnie w przypadku wartości bieżącej renty płatnej z góry:

$$\ddot{a}_{\overline{n|}r} = R(1+r)\,\frac{1-v^n}{r} \tag{2.12}$$

Użyte we wzorach (2.11) oraz (2.12) symbole: $\ddot{s}_{\overline{n|}r}$ oraz $\ddot{a}_{\overline{n|}r}$ oznaczają odpowiednio: wartość skumulowaną oraz wartość obecną renty płatnej z góry.

Jeśli renta w wysokości R jest płatna z góry m razy w ciągu jednego okresu konwersji stopy procentowej przez n okresów konwersji za każdym razem na początku podokresu, wówczas wartość obecną renty płatnej z góry można zapisać wzorem (2.13):

$$\ddot{a}_{\overline{n|}}^{(m)} = \frac{R}{m}\left(1 + v^{\frac{1}{m}} + \ldots + v^{n-\frac{2}{m}} + v^{n-\frac{1}{m}}\right) = R\left(\frac{1-v^n}{d^{(m)}}\right) \tag{2.13}$$

gdzie m oznacza liczbę płatności w jednym okresie konwersji stopy procentowej, n jest terminem renty mierzonym liczbą okresów konwersji stopy procentowej oraz każdy okres konwersji stopy procentowej jest wielokrotnością liczby okresów płatności (m i n są liczbami naturalnymi i większymi od 0).
Pomiędzy wielkościami $\ddot{a}_{\overline{n|}}^{(m)}$, $\ddot{s}_{\overline{n|}}^{(m)}$ oraz $a_{\overline{n|}}$ możemy wykazać następujące zależności, pozwalające na przeliczenia pomiędzy odpowiednimi typami rent:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{\overline{n|}}^{(m)} &= \left(\frac{r}{r^{(m)}} + \frac{r}{m}\right) a_{\overline{n|}} = \frac{r}{d^{(m)}}\, a_{\overline{n|}} \\ \ddot{s}_{\overline{n|}}^{(m)} &= \ddot{a}_{\overline{n|}}^{(m)}(1+r)^n = R\,\frac{(1+r)^n-1}{d^{(m)}} \\ \ddot{s}_{\overline{n|}}^{(m)} &= \left(\frac{i}{i^{(m)}} + \frac{i}{m}\right) s_{\overline{n|}} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Na koniec rozdziału poświęconego rentom warto wspomnieć jeszcze o rentach płatnych w nieskończoność zwanych też rentami wieczystymi lub bezterminowymi. W takiej sytuacji mamy do czynienia z nieskończonym ciągiem geometrycznym. Wartość obecną renty tego typu można zatem wyznaczyć modyfikując nieco wzór (2.1).
W przypadku renty płatnej z dołu wartość obecną renty wieczystej wyrażamy wzorem:

$$a_{\overline{\infty|}r} = v + v^2 + \ldots + v^n + \ldots = \frac{1}{r}$$

natomiast renty płatnej z góry:

$$\ddot{a}_{\overline{\infty|}r} = \frac{1}{d}$$

gdzie d jest stopą dyskonta, natomiast $\ddot{a}_{\overline{\infty|}r}$ – wartością obecną renty płatnej z góry przy ustalonej stopie procentowej r.

METODY WYZNACZANIA RAT KREDYTU NA PODSTAWIE KLASYCZNYCH SCHEMATÓW AMORTYZACJI

Pożyczki i kredyty stanowią istotną część transakcji dokonywanych przez uczestników współczesnych rynków finansowych. Stosunkowo często są również poza rynkiem naturalną formą wzajemnego wsparcia materialnego między nieprofesjonalnymi uczestnikami rynku (np. pożyczki rodzinne). O ile w tym drugim przypadku pożyczki przyjmują postać nieformalną, o tyle w pierwszym strony, którymi są pożyczkodawca (wierzyciel) i pożyczkobiorca (dłużnik) zobowiązują się do zawarcia formalnej umowy między nimi, uregulowanej odpowiednimi przepisami prawa (cywilnego, bankowego, handlowego, gospodarczego, itp.). Do najczęstszych składowych umowy odnośnie kredytu między stronami należy: określenie stron umowy, określenie celu kredytu, określenie wysokości kwoty kredytu, określenie wysokości kosztu kredytu (oprocentowanie, marże, prowizje,…), termin uruchomienia oraz spłaty kredytu, sposób regulowania zobowiązań, określenie zobowiązań, dodatkowe zabezpieczenia odnośnie kredytu, itp. W zależności od okresu, na jaki pożyczka jest udzielona, rozróżnia się kredyty krótkoterminowe (do 1 roku), średnioterminowe (do 5 lat) oraz długoterminowe (powyżej 5 lat). Standardem w przypadku kredytów krótkoterminowych jest stosowanie oprocentowania prostego, w przypadku średnioterminowych – składanego, a w przypadku długoterminowych – składanego lub ciągłego (o którym, z racji ograniczonego zastosowania w kontekście niniejszej broszury, szerzej nie wspominamy). W przypadku zadłużenia powszechnie używamy pojęć: rata kredytu, obsługa kredytu, okres karencji. Zazwyczaj ratę kredytu dzielimy na dwie podstawowe części: część kapitałową oraz część odsetkową, czyli

„Zazwyczaj ratę kredytu dzielimy na dwie podstawowe części: część kapitałową oraz część odsetkową.”

$$R = RK + RO$$

gdzie
RK – część kapitałowa raty R,
RO – część odsetkowa raty R.

Część kapitałowa RK spłaca zaciągniętą kwotę kredytu. Część odsetkowa RO stanowi „koszt” kredytu i zawiera jej podstawowe oprocentowanie, ewentualne marże, prowizje (często traktowane jako odrębny składnik raty) oraz dodatkowe elementy zawarte w umowie. Obsługa kredytu specyfikuje spłatę bieżących rat kapitałowych, rat

„Część kapitałowa RK spłaca zaciągniętą kwotę kredytu. Część odsetkowa RO stanowi „koszt” kredytu i zawiera jej podstawowe oprocentowanie, ewentualne marże, prowizje (często traktowane jako odrębny składnik raty) oraz dodatkowe elementy zawarte w umowie.”

odsetkowych, itd. Okres karencji dotyczy przesunięcia (odroczenia) w czasie spłaty pierwszej raty lub spłaty odsetek w stosunku do momentu udzielenia kredytu. Podobnie, jak poprzednio, okres bazowy oznacza okres, względem którego działa nominalna stopa procentowa.

W przypadku spłaty zobowiązań (długu, pożyczki, kredytu,...) do określenia wartości kapitału pozostałego do spłaty zazwyczaj stosuje się powszechną zasadę równoważności wysokości zobowiązania i rat je spłacających. Zasada ta wywodzi się z ogólniejszej zasady równoważności kapitałów, wg której dwa kapitały są równoważne w chwili t, jeśli równe są ich wartości przeliczone na chwilę t. W przypadku spłaty zobowiązań zasada równoważności zobowiązania oraz spłacających to zobowiązanie rat brzmi: zadłużenie o wartości L_0 w chwili t=0 jest równoważne ciągowi spłacających je rat R_j, jeśli kapitały: udzielającego kredytu oraz spłacającego kredyt są równoważne wg zasady równoważności kapitałów. Zatem sprawdzenie równoważności kapitałów sprowadza się do porównania zaktualizowanych na moment początkowy rat R spłacających dług L oraz wartość długu L_0 (dla wygody ustalamy stałą stopę procentową, która może ulegać modyfikacjom i tą kwestią zajmiemy się w kolejnych podrozdziałach):

„Dwa kapitały są równoważne w chwili t, jeśli równe są ich wartości przeliczone na chwilę t.”

$$L_0 = \sum_{k=1}^{n} R_k \frac{1}{(1+r)^k} \tag{3.1}$$

gdzie L_0 oznacza wartość zobowiązania na początku uruchomionego kredytu spłacanego przez n okresów. Wzór (3.1) jest szczególnym przypadkiem wzoru (2.9) zakładając, iż z każdą ratą wiąże się to samo oprocentowanie. Analogicznie do (3.1) równoważność zobowiązania i spłacających je rat na koniec n-tego okresu spłaty zobowiązania wyznacza się mnożąc obydwie strony (3.1) przez wspólny czynnik postaci $(1+r)^n$, czyli aktualizując L_0 oraz ciąg spłat R_k na ostatnią chwilę t=n

$$L_0(1+r)^n = \sum_{k=1}^{n} R_k \frac{1}{(1+r)^{k-n}} \tag{3.2}$$

Przejście z wartości zaktualizowanej na początek zobowiązania do wartości zaktualizowanej na koniec zobowiązania sugeruje, że korzystając z zasady równoważności kapitałów możemy wyznaczyć wartość długu w dowolnej chwili t, która z jednej strony dłużnikowi pozwoli zweryfikować stan zadłużenia, natomiast wierzycielowi dostarcza informacji o kwocie długu już zwróconego. Zatem przeliczenie kwoty na dowolny moment t (t=1,...,n) trwania zadłużenia dokonuje się na podstawie wzoru (3.3):

$$L_0(1+r)^t = \sum_{k=1}^{n} R_k \frac{1}{(1+r)^{k-t}} \tag{3.3}$$

Rozkład sumy spłacanych rat we wzorze (3.3) na część spłaconą $L_t^R = \sum_{k=1}^{t} R_k \frac{1}{(1+r)^{k-t}}$ do momentu t oraz pozostającą jeszcze do spłaty $L_t^p = \sum_{k=t+1}^{n} R_k \frac{1}{(1+r)^{k-t}}$ pozwala na przedstawienie wartości długu pozostającego do spłaty w dwóch równoważnych postaciach:

$$L_0(1+r)^r - L_t^R = L_0(1+r)^t - \sum_{k=1}^{t} R_k \frac{1}{(1+r)^{k-t}} \tag{3.4}$$

oraz

$$L_t^p = \sum_{k=t+1}^{n} R_k \frac{1}{(1+r)^{k-t}} \tag{3.5}$$

zwanych retrospektywną (3.4), która wyznacza wartość długu L_t^R już spłaconego ratami R_j do chwili t oraz prospektywną (3.5), która określa wartość długu L_t^p pozostałego do spłaty w chwili t. Wartość długu L_j jest podstawą do modyfikacji wysokości rat w sytuacji, gdy np. kredytodawca zmienia stopę oprocentowania kredytu w trakcie jej spłacania (do tej kwestii wrócimy w kolejnym podrozdziale).

Do spłaty kredytu i obsługi zadłużenia w przeszłości stosowano różne metody, które mają swoją długą historię. W ramach niniejszego opracowania wspomniano i scharakteryzowano cztery z nich, które odegrały istotną rolę w przeszłości bądź są stosowane obecnie.

I) „Reguła sprzedawcy” (ang. Merchant`s Rule), która obowiązywała do ok. 1800 r. i według której pierwszych n-1 rat stanowiły raty kapitałowe, natomiast ostatnia rata zawierała część kapitałową oraz odsetkową;

Przykład

Klient pożycza w banku 120 PLN na 12 miesięcy z oprocentowaniem 10%. Według umowy klient ma prawo spłacać kredyt zgodnie z regułą sprzedawcy ratami nieregularnymi i w nieregularnych odstępach. Do tej pory klient wpłacił 20 PLN na koniec 2-go miesiąca, 50 PLN na koniec 5-tego miesiąca oraz 30 PLN na koniec 10-tego miesiąca. Ile wyniesie rata na koniec roku przy założeniu, że obowiązuje rok bankowy (każdy miesiąc ma 30 dni)?

Rozwiązanie:

Gdyby klient miał spłacić cały dług pod koniec roku wraz z odsetkami, to kwota ta wynosiłaby

$$120\,(1+0{,}1) = 132 \text{ PLN.}$$

Jednak klient spłaca dług w nieregularnych częściach w ciągu roku. Po 2 miesiącach saldo jego długu wynosi 100 PLN, a do spłacenia pozostało 10 miesięcy. Kolejna płatność przypada na koniec miesiąca piątego, zatem przez kolejne 3 miesiące (3/12 roku) spłacono 50 PLN. Następna płatność przypada na koniec miesiąca 10-tego. Spłacona przez 5/12 roku kwota wyniosła 30 PLN i do spłacenia pozostaje 20 PLN przez kolejne 2/12 roku. Uwzględniając oprocentowanie w skali roku równe 10% wartość odsetek na koniec 12-tego miesiąca wyniesie:

$$120*(2/12)*10\% + 100*(3/12)*10\% + 50*(5/12)*10\% + 20*(2/12)*10\% = 6{,}92 \text{ PLN.}$$

Zatem rata R uwzględniająca część kapitałową (dług pozostały do spłaty) oraz część odsetkową wyniesie

$$R = 20 + 6{,}92 = 26{,}92 \text{ PLN.}$$

II) „United States rule”: kredytodawca oblicza odsetki od każdej wpłaty raty kredytobiorcy, rata kapitałowa (rata po odjęciu odsetek) sukcesywnie zmniejsza wielkość niespłaconego kapitału, jeśli rata nie pokrywa odsetek wówczas saldo nie zwiększa kapitału. Jeśli spłaty kapitału odbywają się w regularnych odstępach, wówczas koszt kredytu wyznaczony metodą „US Rule” pokrywa się z kosztem kredytu wyznaczonym za pomocą schematu amortyzacji ze stałymi ratami przedstawionym w kolejnym podpunkcie.

Przykład

Podobnie, jak w poprzednim przykładzie, klient pożycza w banku 120 PLN na 12 miesięcy z oprocentowaniem rocznym 10%, ale tym razem spłaca kredyt zgodnie z regułą „US rule" ratami nieregularnymi i w nieregularnych odstępach. Do tej pory klient wpłacił 20 PLN na koniec 2-go miesiąca, 50 PLN na koniec 5-tego miesiąca oraz 30 PLN na koniec 10-tego miesiąca. Ile wyniesie rata na koniec roku przy założeniu, że obowiązuje rok bankowy (każdy miesiąc ma 30 dni)?

Rozwiązanie

*Klient wpłacił R_1 = 20 PLN na koniec 2-go miesiąca z oprocentowaniem 0,10 *(2/12) = 0,01667. W związku z tym część odsetkowa RO_1 = 2 PLN, natomiast część kapitałowa wyniosła RK_1 = 20 – RO_1 = 20 – 2 = 18 PLN i do spłaty pozostało 102 PLN. W kolejnej transzy klient wpłacił 50 PLN i w tym czasie obowiązywało przez 3 miesiące oprocentowanie 0,10*(3/12) = 0,025. Zatem część odsetkowa wyniosła RO_2 = 2,55 PLN, a kapitałowa RK_1=50 – RO_2 = 47,45 PLN i do spłacenia dług w wysokości 54,55 PLN. Ostatnia transza wpłynęła po kolejnych 5 miesiącach w wysokości 30 PLN: oprocentowanie 0,10*(5/12) = 0,041667, RO_3 = 2,2729 PLN, RK_3 = 27,727 PLN i dług w wysokości 26,82 PLN. Zatem ostatnia wpłata wyniesie R_4 = 27,27 PLN, z czego RK_4 = 26,82 PLN oraz RO_4 = 0,4471 PLN. Powyższy schemat spłaty i uzyskane wyniki łatwiej zobrazować w postaci tabeli 1:*

Nr okresu	Oprocentowanie	Rata R	Rata odsetkowa RO	Rata kapitałowa RK	Saldo
0					120
1	0,0167	20	2	18	102
2	0,0250	50	2,55	47,45	54,55
3	0,0417	30,00	2,27	27,73	26,82
4	0,0167	27,27	0,45	26,82	0
Suma	0,10	127,27	7,27	120,00	

Tabela 1. Schemat spłaty „US rule" – opracowanie własne.

III) „Reguła 78" (zwana też metodą „ułamka prostego"), wg której kredyt roczny spłacano w 12 miesięcznych ratach, a odsetki naliczano miesięcznie zgodnie z regułą:

- pod koniec pierwszego miesiąca spłaca się odsetki w wysokości 12/78 kwoty całkowitych odsetek,
- pod koniec drugiego miesiąca – w wysokości 11/78 kwoty całkowitych odsetek, itd…
- pod koniec ostatniego miesiąca – w wysokości 1/78 kwoty całkowitych odsetek, gdzie 78 jest sumą liczb naturalnych od 1 do 12 (kolejne miesiące).

Przy założeniu stałej raty kredyt spłacano rosnącymi kwotami części kapitałowej. W przypadku kredytów krótkoterminowych i niewielkiej stopie oprocentowania „Reguła 78" daje wynik analogiczny do metody „US rule".

IV) Obecnie powszechnie stosowany w instytucjach finansujących kredyt **schemat amortyzacji zakłada, że każda regularna rata spłaca w pewnej części kapitał, a w pozostałej odsetki w trakcie trwania umowy kredytowej**. Brak spłaty w dowolnym okresie trwania spłaty kredytu powoduje wzrost salda długu, czyli kwoty zadłużenia (mówimy wtedy o amortyzacji negatywnej). Okresy odsetkowe oraz wysokości spłat mogą być ustalane wg określonych zasad (np. podanych w I–III) przy zawieraniu formalnej umowy. W przypadku zastosowania schematu amortyzacji do spłaty zadłużenia w wysokości L, spłacanego w ciągu n-okresów przy stopie procentowej r_k ogólna procedura wygląda następująco:

- wysokość odsetek RO_k wyznacza się na podstawie stanu zadłużenia S_k oraz obowiązującej w tym okresie stopy procentowej r_k

$$RO_k = r_k S_k \tag{3.6}$$

Stan zadłużenia S_{k+1} w okresie k+1 po wpłacie raty zależy od stanu zadłużenia S_k oraz wysokości raty R_{k+1} i związanych z nią odsetek RO_{k+1}, który można zapisać w postaci rekurencyjnej:

$$S_{k+1} = S_k - (R_{k+1} - RO_{k+1}) \tag{3.7}$$

Zsumowanie równości $R_k = RO_k + RK_k$ po wszystkich okresach (k = 1, …, n) z jednej strony opisuje sumę wszystkich wpłaconych rat, z drugiej zaś, kwotę zaciągniętego długu L oraz sumę odsetek płaconych przez kredytobiorcę w postaci rat odsetkowych (intepretowanych jako „koszt" kredytu)

$$\sum_{k=1}^{n} R_k = L + \sum_{k=1}^{n} RO_k \tag{3.8}$$

Podobnie, jak w przypadku „US Rule", zazwyczaj schemat amortyzacji przedstawiamy w wygodniejszej postaci za pomocą tabeli 2.

Okres	Rata	Odsetki	Część kapitałowa	Saldo długu
0				S_0
1	R_1	RO_1	RK_1	$S_1 = S_0 - RK_1$
…	…	…	…	…
j	R_j	RO_j	RK_j	$S_j = S_{j-1} - RK_j$
…	…	…	…	…
n	R_n	RO_n	RK_n	$S_n \sim 0$
Σ	$\Sigma_j R_j$	$\Sigma_j RO_j$	$\Sigma_j RK_j = L$	

Tabela 2. Schemat amortyzacji długu w wysokości L przez n-okresów – opracowanie własne.

Większość przykładów przedstawionych w dalszej części tego rozdziału będzie głównie odwoływała się do schematu amortyzacji długu.

Podane w podpunktach **I–IV** przykłady metod spłaty długu nie wyczerpują wszystkich możliwości. Obecnie obsługę spłaty zadłużenia zazwyczaj opiera się na schemacie amortyzacji i korzysta z ciągu regularnych płatności ratalnych w ustalonych momentach. Rzadko w praktyce spłata kredytu następuje poprzez jednorazowy zwrot pełnej kwoty długu. W przypadku kredytów ze zmiennym oprocentowaniem w czasie trwania spłaty kredytu (np. uzależnionym od wysokości oprocentowania WIBOR[3] w walucie polskiej lub LIBOR[4] bądź EURIBOR[5] w przypadku kredytów w walucie obcej) spłata długu może następować w ratach stałych (okresowo stałych) bądź zmiennych. W przypadku rat stałych (okresowo stałych) dodatkowo w schemacie spłaty ustala się, czy rata będzie zawierała stałą część kapitałową, czy też stałą część odsetkową. W kolejnych podrozdziałach rozważymy przypadki ze stałą ratą, stałą częścią kapitałową oraz ewentualnymi modyfikacjami wynikającymi z dodatkowych zapisów w umowie o kredyt.

SPŁATA KREDYTU W STAŁYCH RATACH

Zakładamy, że dług L spłacany jest w stałych ratach R przez n okresów (na koniec każdego z nich) ze stopą procentową r, zatem ciąg spłat możemy traktować jako rentę n-okresową. W takiej sytuacji dług powinien zostać zamortyzowany ciągiem płatności w wysokości R zaktualizowanych współczynnikiem dyskontującym v na początek uruchomienia spłaty długu, czyli $L = Rv + Rv^2 + \ldots + Rv^n = Ra_{\overline{n|}r}$. Zatem wysokość raty R wyznaczymy zgodnie z wzorem (3.9)

$$R = \frac{L}{a_{\overline{n|}r}} \tag{3.9}$$

Znając wysokość raty R i sposób naliczania odsetek określający część odsetkową raty RO, możemy wyznaczyć część kapitałową raty RK w każdym okresie spłaty. Odejmując od kwoty długu L część kapitałową zmniejszamy w każdym kolejnym okresie wysokość długu, aż do spłacenia całego długu. Tę rekurencyjną procedurę spłaty zazwyczaj określa się właśnie jako schemat amortyzacji, który dla wygody bywa przedstawiany w postaci tabeli. Tabela 3 przedstawia schemat spłaty długu przy założeniu, że rata wynosi 1 j.p. (w przypadku raty w wysokości R wystarczy przeskalować wartości w kolumnach R, RO oraz RK tabeli). W okresie 0 znamy saldo długu L, które część kapitałowa RK raty R będzie zmniejszała przez kolejnych n okresów do 0. Przy założeniu stałej raty R część odsetkową RO w okresie n=1 wyznaczamy na podstawie oprocentowania salda w okresie poprzednim. Ratę kapitałową w okresie n=1 uzyskujemy odejmując od raty R wysokość raty odsetkowej, która zmniejsza o tę część saldo długu (w wierszu tabeli 3 dla okresu pierwszego przedstawiono rozkład raty jednostkowej na część odsetkową oraz kapitałową).

[3] WIBOR (ang. Warsaw Interbank Offered Rate) – funkcjonujące od 1991 oprocentowanie kredytów oferowanych na polskim rynku międzybankowym ustalane w Warszawie.
[4] LIBOR (ang. London Interbank Offered Rate) – oprocentowanie kredytów oferowanych na rynku bankowym przez banki: Bankers Trust, Barclays, National Westminster oraz Bank of Tokyo ustalane w Londynie.
[5] EURIBOR (ang. Euro Interbank Offered Rate) – oprocentowanie kredytów oferowanych na rynku bankowym na podstawie średniego notowania 57 banków strefy euro ustalane w Brukseli.

Okres	Rata R	Część odsetkowa RO	Część kapitałowa RK	Saldo długu
0				$a_{\overline{n}\rceil r}$
1	1	$ra_{\overline{n}\rceil r} = 1 - v^n$	$1 - ra_{\overline{n}\rceil r} = 1 - (1 - v^n) = v^n$	$a_{\overline{n}\rceil r} - v^n = a_{\overline{n-1}\rceil r}$
2	1	$ra_{\overline{n-1}\rceil r} = 1 - v^{n-1}$	v^{n-1}	$a_{\overline{n-1}\rceil r} - v^{n-1} = a_{\overline{n-2}\rceil r}$
...	...	...	...	...
t	1	$ra_{\overline{n-t+1}\rceil r} = 1 - v^{n-t+1}$	v^{n-t+1}	$a_{\overline{n-t+1}\rceil r} - v^{n-t+1} = a_{\overline{n-t}\rceil r}$
...	...	...	...	...
n-1	1	$ra_{\overline{2}\rceil r} = 1 - v^2$	v^2	$a_{\overline{2}\rceil r} - v^2 = a_{\overline{1}\rceil r}$
n	1	$ra_{\overline{1}\rceil r} = 1 - v$	v	$a_{\overline{1}\rceil r} - v \sim 0$
Σ	n	$n - a_{\overline{n}\rceil r}$	$a_{\overline{n}\rceil r}$	

Tabela 3: Schemat amortyzacji – stała rata jednostkowa (1 j.p.) – opracowanie własne.

Przykład

Kredyt w wysokości 10 000 PLN powinien zostać spłacony w ciągu roku w ratach płatnych na koniec każdego z 4 kwartałów przy kwartalnej stopie procentowej r=6% ($r^{(4)}$ = 24%). Ile wynosi wysokość raty oraz koszt kredytu?

Rozwiązanie

Do wyznaczenia raty potrzebujemy wartości obecnej renty płatnej z dołu przez 4 okresy:

$$a_{\overline{4}\rceil 0,06} = \frac{1}{1+0,06} + \left(\frac{1}{1+0,06}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+0,06}\right)^3 + \left(\frac{1}{1+0,06}\right)^4 \approx 3,465106$$

Zatem

Stąd stała rata $R = \frac{L}{a_{\overline{4}\rceil 6\%}} = \frac{10\,000}{3,4651}$ *= 2885,91 PLN. Uzyskane wartości zamieszczamy w tabeli 4 i zgodnie ze schematem amortyzacji wyznaczamy część odsetkową, część kapitałową oraz koszt kredytu.*

Okres	Rata	Odsetki	Część kapitałowa	Saldo długu
0				10 000
1	2885,91	600	2285,91	7714,09
2	2885,91	462,85	2423,07	5291,03
3	2885,91	317,46	2568,46	2722,57
4	2885,91	163,35	2722,56	0
Σ	11 543,64	1543,66	10 000	

Tabela 4: Schemat amortyzacji – stała rata – opracowanie własne.

Zatem po spłacie ostatniej raty dłużnik oddał wierzycielowi kwotę w wysokości 11 543,64 PLN, z czego koszt kredytu wyniósł 1543,64 PLN (po zaokrągleniu salda długu z ostatniego okresu spłaty).

SPŁATA KREDYTU ZE STAŁĄ CZĘŚCIĄ KAPITAŁOWĄ

Zakładamy, że kredyt w wysokości L spłacamy równymi ratami kapitałowymi przez n okresów. Wysokość raty kapitałowej RK niezależnie od okresu, w którym jest spłacana wynosi $RK = \frac{L}{n}$. Każdą płatność R – jak dotychczas – rozkładamy na kapitał i odsetki

$$R_t = RK_t + RO_t \qquad t=1,2,\ldots, n.$$

Zgodnie ze schematem amortyzacji spłata długu w kolejnych ratach $R_1, R_2, \ldots, R_n$ powinna być w takich wysokościach, aby ich suma po zaktualizowaniu na chwilę początkową udzielenia kredytu pokryła kwotę długu L. Zatem $L = \sum_{t=1}^{n} v^t R_t$. W takiej sytuacji powszechnie zakłada się, że stopa oprocentowania r jest stała, w związku z tym raty tworzą ciąg malejący.

Przykład

Podobnie jak w poprzednim przykładzie sporządzimy schemat amortyzacji rocznego długu w wysokości 10 000 PLN spłacanego w 4 ratach kwartalnych z kwartalnym oprocentowaniem r=6% ($r^{(4)} = 24\%$), ale przy założeniu stałej części kapitałowej.

Rozwiązanie

Ponieważ część kapitałowa jest stała, zatem rata kapitałowa $RK = \frac{10\,000}{4} = 2500$ *PLN. Odsetki w okresie n naliczamy względem salda długu z okresu n-1 (podobnie, jak w poprzednim przykładzie): w pierwszym okresie 0,06*10 000 PLN = 600 PLN. Zatem rata* R_1 *w pierwszym okresie wyniesie* $R_1 = RK_1 + RO_1 = 2500$ *PLN + 600 PLN = 3100 PLN. Analogicznie postępując wyznaczamy raty w kolejnych okresach, wartości których zamieszczamy w tabeli 5.*

Kwartał	Rata	Odsetki	Część kapitałowa	Saldo długu
0				10 000
1	3100	600	2500	7500
2	2950	450	2500	5000
3	2800	300	2500	2500
4	2650	150	2500	0
Σ	11 500	1500	10 000	

Tabela 5. Schemat amortyzacji w przypadku rat ze stałą częścią kapitałową – opracowanie własne.

Suma rat wyniosła 11 500 PLN. Po odliczeniu długu w wysokości 10 000 PLN koszt kredytu wynosi 1500 PLN i jest równoważny sumie wpłaconych odsetek. Porównując z kosztem kredytu z poprzedniego przykładu takie rozwiązanie z punktu widzenia kredytobiorcy jest korzystniejsze.

SCHEMAT AMORTYZACJI DŁUGU – FUNDUSZ UMORZENIOWY

Spłata kredytu za pomocą funduszu umorzeniowego (ang. sinking fund) wiąże się z gromadzeniem środków na dodatkowym koncie, które to środki powinny pokryć część kapitałową długu w terminie jego płatności (zazwyczaj w ostatniej racie). Oprócz tego kredytobiorca spłaca kredytodawcy odsetki od długu w ustalonym momencie.

Rzadko zdarza się, aby wysokość oprocentowania kredytu oraz wysokość oprocentowania na funduszu umorzeniowym się pokrywały. Można pokazać, że jeśli stopa procentowa s obowiązująca na dodatkowym koncie, na którym gromadzi się środki na spłatę kredytu, jest odpowiednio wyższa niż stopa procentowa r obwiązująca przy spłacie zaciągniętego kredytu, wówczas z punktu widzenia kredytobiorcy korzystniejsza jest spłata zadłużenia poprzez fundusz umorzeniowy w przeciwieństwie do rozważanego wcześniej schematu amortyzacji ze stałymi ratami.

Załóżmy, że mamy do spłacenia dług w wysokości L, do którego stosujemy schemat amortyzacji z funduszem umorzeniowym w n ratach i stopie procentowej r. Ponadto wpłaty na fundusz umorzeniowy gromadzone są w q równych ratach kapitałowych o wysokości R_F przy bazowej stopie procentowej s oraz stopie dyskontowej g względem okresu bazowego dla wpłat na fundusz umorzeniowy, okresy bazowe związane ze spłatą odsetek (b_r) oraz wpłatą na fundusz umorzeniowy (b_s) spełniają zależność: $n\, b_r = q\, b_s$. Ponieważ na funduszu umorzeniowym w terminie spłaty długu trzeba zgromadzić kapitał z odsetkami o wartości długu równym L, w związku z tym dokonujemy q wpłat w wysokości R, które wygenerują wartość końcową renty płatnej z dołu przez q okresów i przy stopie s. Stąd zgodnie z wzorem (2.3):

$$L = R s_{\overline{q|}s},$$

czyli wartość raty wpłacanej na konto wyniesie $R^s = \dfrac{L}{s_{\overline{q|}s}}$.

W przypadku schematu amortyzacji ze stałą ratą zgodnie z (3.9) wartość raty R^r wyniesie $R^r = \dfrac{L}{a_{\overline{n|}r}}$. Zakładając, że r=s (stopy procentowe są sobie równe) sposób spłaty kredytu dla kredytobiorcy powinien być obojętny, czyli po uwzględnieniu odsetek od pożyczonej kwoty L płatnych przez kredytobiorcę w ostatniej racie w przypadku spłaty poprzez fundusz umorzeniowy oraz spłaty za pomocą schematu amortyzacji, raty powinny być identyczne. Korzystając z przejścia między $a_{\overline{n|}r}$ oraz $s_{\overline{n|}r}$ (wzór 2.8) między ratami:

$$R^s = sL + \frac{L}{s_{\overline{q|}s}} = L\left(s + \frac{1}{s_{\overline{q|}s}}\right) = L\left(\frac{1}{a_{\overline{q|}s}}\right) = \frac{L}{a_{\overline{n|}r}} = R^r \qquad (3.10)$$

osiągamy równość przy założeniu, że q=n oraz s=r, gdyż

$$\frac{1}{s_{\overline{q|}s}} + s = \frac{s}{(1+s)^q-1} + s = \frac{s+s(1+s)^q-s}{(1+s)^q-1} = \frac{s}{1-v^q} = \frac{1}{a_{\overline{q|}s}}$$

gdzie

L – wysokość kwoty pożyczonej,

q, n – liczby wpłat utożsamione z liczbą okresów,

r, s – stopy procentowe dla odpowiednich okresów,

R^r (R^s) – wartość raty przy stopie procentowej r (s),

$a_{\overline{n}|r}$ – wartość obecna renty n-okresowej płatnej z dołu oprocentowanej r,

$s_{\overline{n}|r}$ – wartość zakumulowana renty n-okresowej płatnej z dołu i oprocentowanej r.

W przypadku, gdy r > s spłata kredytu poprzez fundusz umorzeniowy generuje wyższe koszty po stronie kredytobiorcy, niż spłata za pomocą klasycznego schematu i w związku z tym nie jest opłacalna.

Przykład

Klient zaciągnął w banku kredyt w wysokości 10 000 PLN na 4 kwartały przy kwartalnej stopie r=6%. Bank miał dla klienta dwie oferty spłaty zadłużenia:

I) za pomocą stałych rat w wysokości R = 2885,91 PLN przez cztery kwartały (klasyczny schemat amortyzacji rozpatrywany we wcześniejszym przykładzie)

albo

II) spłatę tylko odsetek przez trzy kwartały, a w ostatniej racie zwrot całej kwoty kredytu wraz z odsetkami za ten kwartał.

W obydwu przypadkach obowiązywała ta sama stopa procentowa. Którą z ofert wybrał klient?

Rozwiązanie

Zanim klient zdecydował się na jedną z proponowanych ofert spłaty sprawdził oferowane przez banki promocje lokat wraz z ich oprocentowaniem i znalazł roczną lokatę typu „systematyczne oszczędzanie", która pozwalała na systematyczne wpłaty co kwartał stałej kwoty z odsetkami dopisywanymi kwartalnie do kwoty z poprzedniego kwartału i oprocentowanej na poziomie s=6,5%. Po przeliczeniu zdecydował się na rozwiązanie II), w wyniku którego:

*a) wysokość kwartalnych odsetek wyniosła 0.06 * 10 000 PLN = 600 PLN (odsetki pokrywają się w przypadku pierwszej raty w schemacie amortyzacji z oferty I),*

b) chcąc pod koniec roku uzyskać kwotę 10 000 PLN przy kwartalnym oprocentowaniu s=6,5% wpłaca co kwartał na lokatę „systematyczne oszczędzanie" ratę w wysokości

$$R_L = \frac{L}{a_{\overline{4}|0,065}} = \frac{10\ 000}{4,4072} = 2269,03 \text{ PLN.}$$

Uwzględniając a) i b) sumaryczne obciążenie kwartalne kredytobiorcy wyniosło R=600+2269,03=2869,03 PLN, co po spłacie ostatniej raty dało koszt kredytu w wysokości 1476.12 PLN.

W przypadku spłaty zadłużenia według oferty I kwartalna rata R wyniosła 2885,91 PLN, co wygenerowało koszt w wysokości 1543.68 PLN. Dlatego też rozwiązanie II było korzystniejsze dla klienta.

Gdyby klient nie znalazł lokaty typu „systematyczne oszczędzanie", w której stopa procentowa s > r (stopy oprocentowania kredytu), wówczas oferta II nie byłaby opłacalna. Również w przypadku r=s i braku dodatkowych obciążeń (prowizji za uruchomienie lokaty, bądź kredytu, itp.) lub gratyfikacji (np. dodatkowe 50 PLN na koncie za uruchomienie lokaty) klientowi byłoby obojętne, którą metodą spłaci kredyt, gdyż obydwie generowałyby raty o identycznej wysokości.

RESTRUKTURYZACJA DŁUGU

Spłata kredytów długoterminowych za pomocą stałej raty R, która nie zmieni się przez cały okres kredytowania, wydaje się nie być realna w obecnej sytuacji na rynkach finansowych. Wiąże się to zarówno z utrzymaniem jednolitej stopy procentowej przez cały okres kredytowania, jak i sytuacji ekonomicznej zaciągającego kredyt. Bardzo często w praktyce umowa kredytowa zawiera klauzulę pozwalającą na zmianę oprocentowania w trakcie jego trwania (np. wskutek cięć bądź wzrostu stóp procentowych przez Radę Polityki Pieniężnej, zmian WIBOR-u, LIBOR-u, itp.), bądź zmianę sposobu spłaty kredytu poprzez wydłużenie lub skrócenie okresu kredytowania, odroczenie płatności, spłatę tylko części odsetkowej na początku okresu kredytowania, a dopiero po jakimś czasie pozostałej do spłaty również części kapitałowej. Powstaje wówczas pytanie: jak wpłyną takie dodatkowe modyfikacje na wysokość raty zaciągniętego kredytu? W poniższym przykładzie spróbujemy odnieść się do wspomnianych modyfikacji.

Przykład

Klient banku zaciągnął kredyt roczny w wysokości 10 000 PLN, który przy podpisaniu umowy powinien być spłacany w ratach równych na koniec każdego kwartału przy kwartalnej stopie procentowej r=6%. W umowie kredytu znalazła się klauzula pozwalająca – za zgodą banku oraz klienta – opcjonalnie: zmodyfikować oprocentowanie kredytu, w pierwszej racie spłacić tylko część odsetkową raty, odroczyć spłatę o jeden okres oraz obniżyć wysokość raty poprzez wydłużenie okresu kredytowania. Rozważymy następujące sytuacje:

a) po dwóch kwartałach oprocentowanie kwartalne kredytu wzrasta do r` =10%,

b) spłata w pierwszej racie tylko części odsetkowej (odroczenie spłaty części kapitałowej),

c) brak spłaty w pierwszym okresie (odroczenie spłaty części kapitałowej i odsetkowej),

d) sytuacja finansowa klienta po dwóch okresach spłaty kredytu zmusza go do obniżenia wysokości raty od trzeciego okresu poprzez wydłużenie okresu kredytowania o kolejne 4 kwartały przy niezmienionej początkowej stopie procentowej.

Jak zmieni się koszt kredytu względem poszczególnych przypadków?

Rozwiązanie

Do wyznaczenia wysokości raty stosujemy schemat amortyzacji z odpowiednio skorygowaną wartością raty wewnątrz okresu kredytowania w zależności od dodatkowych warunków. Gdyby klient spłacał kredyt w wysokości 10 000 PLN równymi ratami przy ustalonym oprocentowaniu r = 6% bez dodatkowych warunków, to rata kredytu (bazując na wcześniejszym przykładzie) wyniosłaby $R = \frac{L}{a_{\overline{4}|0,06}} = \frac{10\ 000}{3,4651} = 2885,91$ *PLN.*

W przypadku a) klient spłacił dwie raty według początkowego schematu ze stopą i=6% i na koniec 2-go kwartału saldo zadłużenia wyniosło 5291,03 PLN. W trzecim kwartale oprocentowanie wzrosło do i = 10%, zatem kolejne dwie raty będą naliczone od pozostałej do spłacenia kwoty, czyli 5291,03 PLN i wyniosą $R = \frac{L}{a_{\overline{2}|0,10}} = \frac{5291,03}{1,7355} = 3048,64$ *PLN.*

Podobnie jak w poprzednich przykładach wyniki przedstawiono w tabeli 6 (kursywą zaznaczono wiersze, które ulegają modyfikacji w stosunku do pierwotnego schematu oraz we wszystkich przykładach dokonano zaokrągleń do części setnej):

Kwartał	Rata	Odsetki	Cześć kapitałowa	Saldo długu
0				10 000
1	2885,91	600,00	2285,91	7714,09
2	2885,91	462,85	2423,06	5291,03
3	*3048,64*	*529,10*	*2519,54*	*2771,49*
4	*3048,64*	*277,15*	*2771,49*	*0*
Σ	11 869,10	1869,10	10 000,0	

Tabela 6. Schemat amortyzacji – przypadek a) – opracowanie własne.

*W przypadku b) w pierwszej racie nastąpiła spłata tylko części odsetkowej, natomiast część kapitałowa – w zależności od umowy – zostanie spłacona przez kolejne 4 okresy (co wydłuża okres kredytowania), bądź rozłożona na pozostałe do spłaty 3 okresy zachowując tym samym pierwotny okres kredytowania. W pierwszym przypadku, w pierwszym okresie spłacamy odsetki w wysokości 0.06 *10 000 PLN = 600 PLN, natomiast wysokość raty pozostaje na poziomie pierwotnego schematu bez dodatkowych warunków, czyli 2885,91 PLN. Wyniki zamieszczono w tabeli 7.*

Kwartał	Rata	Odsetki	Część kapitałowa	Saldo długu
0				10 000
1	*600,00*	*600,00*	*0*	*10 000*
2	2885,91	600,00	2285,91	7714,09
3	2885,91	462,85	2423,06	5291,03
4	2885,91	317,46	2568,45	2722,58
5	2885,91	163,35	2722,56	0
Σ	12 143,64	2143,66	10 000	

Tabela 7. Schemat amortyzacji – przypadek b) – opracowanie własne.

Drugi przypadek natomiast nie zmienia okresu kredytowania (4 raty), ale zwiększa wysokość pierwszej raty, która w tej sytuacji wyniesie $R = \frac{L}{a_{\overline{3}|0,06}} = \frac{10\,000}{2,673} = 3741,10$ *PLN. Spłacona kwota zadłużenia wraz z odsetkami ze wszystkich rat wyniesie 10 000 + 1823,29 = 11823,30 PLN. W stosunku do poprzedniego rozwiązania, w którym koszt kredytu osiągnął 2143,66 PLN, a całkowita spłacona kwota 12143,64 PLN, obecne rozwiązanie z punktu widzenia klienta jest bardziej opłacalne.*

*W przypadku c) pierwsza spłata raty następuje w drugim okresie i w związku z tym okres kredytowania wydłuża się do 5 kwartałów. Jednak odsetki od salda długu naliczono już w pierwszym okresie spłaty i choć nie spłacane, zwiększają saldo zadłużenia. Zatem wysokość raty naliczono od kwoty 10 000+0,06*10 000 = 10 600 PLN, która wyniosła* $R = \frac{L}{a_{\overline{4}|0,06}} = \frac{10\,600}{3,4651} = 3059,07$ *PLN.*

Kwartał	Rata	Odsetki	Część kapitałowa	Saldo długu
0				10 000
1	*0*	*600,00*	*0*	*10 600,00*
2	3059,07	636,00	2423,07	8176,93
3	3059,07	490,62	2568,45	5608,48
4	3059,07	336,51	2722,56	2885,92
5	3059,07	173,16	2885,91	0,01
Σ	12 236,28	2236,29	10 599,99	

Tabela 8. Schemat amortyzacji – przypadek c) – opracowanie własne.

W ostatnim przypadku d) klient po dwóch okresach spłaty decyduje się na zmniejszenie kwartalnego obciążenia finansowego poprzez wydłużenie okresu kredytowania. Wówczas począwszy od okresu trzeciego pozostałe zadłużenie w wysokości 5291,03 PLN zostaje rozłożone na kolejne 4 raty, czyli $R = \frac{L}{a_{\overline{4}|0,06}} = \frac{5291,03}{3,4651} = 1526,95$ *PLN.*

Kwartał	Rata	Odsetki	Część kapitałowa	Saldo długu
0				10 000
1	2885,91	600,00	2285,91	7714,09
2	2885,91	462,85	2423,06	5291,03
3	*1526,95*	*317,46*	*1209,49*	*4081,54*
4	*1526,95*	*244,89*	*1282,06*	*2799,48*
5	*1526,95*	*167,97*	*1358,98*	*1440,50*
6	*1526,95*	*86,43*	*1440,52*	*0*
Σ	11 879,62	1879,60	10 000,00	

Tabela 9. Schemat amortyzacji – przypadek d) – opracowanie własne.

Koszt kredytu w tym przypadku wyniósł 1879,60 PLN.

RZECZYWISTA ROCZNA STOPA OPROCENTOWANIA

Ustawa z 12 V 2011 r. o kredycie konsumenckim[6] wprowadziła wobec kredytodawców udzielających kredytów konsumenckich obowiązek podawania w reklamach produktów kredytowych rzeczywistej rocznej stopy oprocentowania (RRSO, ang. annual percentage rate). Intencją ustawodawcy było m.in. ustalenie realnej stopy kosztu spłaty zadłużenia oraz ułatwienie konsumentowi zainteresowanemu kredytem porównania dostępnych na rynku ofert kredytowych. RRSO powinna zatem uwzględniać całkowity koszt kredytu (oprocentowanie, marże, prowizje, itp.), aby klient wpłacając kwotę uzyskaną od kredytodawcy np. na lokatę oprocentowaną stopą równą dokładnie RRSO i podaną przy podpisaniu umowy o kredyt, otrzymał kwotę dokładnie pokrywającą

[6] Dz.U. z 2011 r. Nr 126, poz. 715

„RRSO powinna uwzględniać całkowity koszt kredytu (oprocentowanie, marże, prowizje, itp.), aby klient wpłacając kwotę uzyskaną od kredytodawcy np. na lokatę oprocentowaną stopą równą dokładnie RRSO i podaną przy podpisaniu umowy o kredyt, otrzymał kwotę dokładnie pokrywającą zaciągnięty dług wraz z odsetkami i dodatkami określonymi w umowie."

zaciągnięty dług wraz z odsetkami i dodatkami określonymi w umowie. We wspomnianej ustawie zawarto wzór (3.11), za pomocą którego porównując dwa strumienie płatności: kredytodawcy względem kredytobiorcy w czasie t_1 i wysokości R_1 oraz kredytobiorcy względem kredytodawcy w czasie t_2 i wysokości R_2, można wyznaczyć szukaną RRSO:

$$\sum_{k_1=1}^{\tau_1} \frac{R_{1,k_1}}{(1+r)^{t_{k_1}}} = \sum_{k_2=1}^{\tau_2} \frac{R_{2,k_2}}{(1+r)^{t_{k_2}}} \tag{3.11}$$

gdzie R_{1,k_1} oraz R_{2,k_2} oznaczają wysokości rat płatne odpowiednio w okresach τ_1 i τ_2 oraz zdyskontowane względem identycznej stopy procentowej *r* na wspólny początek okresów τ_1, τ_2.

O płatnościach (ewentualnie ciągach płatności) zakłada się, że są dodatnie ($R_1>0$, $R_2>0$) oraz $t_1=0$ w obydwu przypadkach. Wzór (3.11) przypomina w pewnym sensie wzór (3.1), gdyż podobnie, jak (3.1) jest konsekwencją zasady równoważności kapitałów: z jednej strony kapitału kredytodawcy w postaci rat(y) R_1, z drugiej natomiast kredytobiorcy w postaci rat(y) R_2. Wyznaczone oprocentowanie r z zależności (3.11) określa RRSO. Sposób wyznaczenia RRSO jest podobny do wyznaczenia wewnętrznej stopy zwrotu (IRR, ang. internal rate of return) i tylko w szczególnych przypadkach jest możliwe do osiągnięcia metodami analitycznymi. Zazwyczaj RRSO oblicza się z wykorzystaniem metod iteracyjnych pozwalających znaleźć pierwiastki wielomianu, który powstaje po przekształceniu (3.11). Odrębny problem stanowi jedyność i jednoznaczność znalezionego rozwiązania, ale ta kwestia wykracza poza ramy niniejszego opracowania (czytelników zainteresowanych tą problematyką odsyłamy np. do klasyki z dziedziny podstaw matematyki finansowej, czyli pozycji [4] KELLISON s. 6). W większości pakietów komputerowych istnieją specjalne funkcje, dzięki którym podając odpowiednie strumienie płatności możemy wyznaczyć RRSO (Excel: Solver lub funkcja IRR, R: pakiety: FinCal oraz lifecontingencies).

Przykład

Bank udziela w chwili $t_1=0$ kredyt w wysokości 1000 PLN na okres 4 lat. Klient ma do wyboru spłatę kredytu w dwóch transzach: na koniec drugiego oraz na koniec czwartego roku w wysokości 600 PLN każda lub spłatę w czterech ratach po 300 PLN. Ile wyniesie RRSO w obydwu propozycjach i która z propozycji spłaty jest korzystniejsza dla klienta?

Rozwiązanie

W obydwu przypadkach mamy do czynienia z wielomianem, którego miejsce zerowe będzie jednocześnie RRSO. W pierwszym przypadku klient w chwili 0 otrzymuje do dyspozycji kwotę w wysokości $R_{1,1}=1000$ PLN, którą zwraca w dwóch ratach: po drugim oraz po czwartym roku w wysokości $R_{2,2}= R_{2,4}=600$ PLN każda. Zgodnie ze wzorem (3.11) równoważność strumieni płatności można zapisać równaniem:

$$\frac{1000}{(1+r)^0} = \frac{600}{(1+r)^2} + \frac{600}{(1+r)^4}$$

Po pomnożeniu przez czynnik $(1+r)^4$ (o ile $r > -1$, a w przypadku tej inwestycji nie mamy takich wątpliwości, gdyż kwota spłacana przez klienta przewyższa kwotę pożyczoną), przeniesieniu wyrazów na jedną stronę i przyrównaniu do zera otrzymujemy:

$$1000(1+r)^4 - 600(1+r)^2 - 600 = 0$$

Dodatnim rozwiązanie równania jest r= 6,33%. Ze względu na specyficzną postać tego równania można sprowadzić je do równania kwadratowego oraz rozwiązać klasycznymi metodami akceptując rozwiązanie dodatnie, czyli

$$1000z^2 - 600z - 600 = 0$$

gdzie $(1+r)^2 = z$, skąd $r = z^{1/2} - 1$.

W drugim przypadku spłaty odbywają się co rok w wysokości 300 PLN i tym razem strumienie płatności w postaci równania przyjmą postać:

$$\frac{1000}{(1+r)^0} = \frac{300}{(1+r)^1} + \frac{300}{(1+r)^2} + \frac{300}{(1+r)^3} + \frac{300}{(1+r)^4}$$

Ponieważ wyznaczenie miejsc zerowych powyższego wielomianu metodami analitycznymi byłoby bardzo trudne, zatem podamy RRSO korzystając z funkcji IRR zawartej we wspomnianych wcześniej pakietach. W tym przypadku RRSO wynosi 7,71%. Klient mając do dyspozycji dwa sposoby spłaty kredytu wybierze ten, który generuje niższy koszt kredytu, czyli RRSO = 6,33%.

Przykład

Bank udziela w chwili $t_1 = 0$ kredytu w wysokości 100 PLN na okres 6 półroczy. Kredyt zostanie:

a) wypłacony przez bank w chwili 0 w jednej transzy i spłacony przez kredytobiorcę w jednej racie w wysokości 150 PLN na koniec szóstego półrocza przez kredytobiorcę,

b) wypłacony przez bank w dwóch transzach: w chwili 0 w wysokości 50 PLN oraz w drugim półroczu w wysokości 50 PLN i spłacony w dwóch ratach: w czwartym półroczu w wysokości 60 PLN oraz szóstym półroczu w wysokości 90 PLN przez kredytobiorcę,

c) wypłacony przez bank w dwóch transzach: chwili 0 w wysokości 50 PLN i w drugim półroczu w wysokości 50 PLN, ale pobraną dodatkową prowizją w wysokości 5 PLN płatną przez kredytobiorcę na początku uruchomienia kredytu oraz spłacony w dwóch ratach: w czwartym półroczu w wysokości 60 PLN i szóstym półroczu w wysokości 90 PLN.

Wartości rat zawierają ewentualne marże ustanowione przez bank. Ile wyniesie RRSO w poszczególnych przypadkach?

Rozwiązanie

Podobnie, jak w poprzednim przykładzie, w każdym z przypadków podamy postać odpowiedniego równania względem strumieni płatności, wyznaczymy stopę procentową dla danego okresu bazowego (w tym przypadku półrocza) i przeliczymy na stopę roczną, aby otrzymać RRSO.

W przypadku a) sytuacja jest prosta: jedna transza kredytu oraz jedna rata go spłacająca, zatem

$$\frac{100}{(1+r)^0} = \frac{150}{(1+r)^6}$$

stąd stopa półroczna $r = 6{,}99\%$. Roczna stopa r_{ef} zgodnie z (1.11) wyniesie

$$(1+r)^2 = 1 + r_{ef}$$

czyli

$$RRSO = r_{ef} = (1 + 0{,}0699)^2 - 1 = 14{,}47\%.$$

W przypadku b) równość między strumieniami płatności podana poniżej

$$\frac{50}{(1+r)^0} + \frac{50}{(1+r)^2} = \frac{60}{(1+r)^4} + \frac{90}{(1+r)^6}$$

dostarcza stopy półrocznej $r = 10{,}13\%$. Stąd

$$RRSO = r_{ef} = (1 + 0{,}1013)^2 - 1 = 21{,}29\%.$$

Ostatecznie, w przypadku c), równość między strumieniami płatności przyjmuje postać:

$$\frac{50}{(1+r)^0} + \frac{50}{(1+r)^2} = \frac{5}{(1+r)^0} + \frac{60}{(1+r)^4} + \frac{90}{(1+r)^6}$$

stąd półroczna $r = 11{,}64\%$, czyli

$$RRSO = r_{ef} = (1 + 0{,}11638)^2 - 1 = 24{,}63\%.$$

Zatem dołożenie niewielkiej prowizji istotnie zwiększa koszt kredytu. Z podanych ofert najkorzystniejsza jest więc oferta a).

ZAKOŃCZENIE

„Czy rata mojego kredytu nie jest za wysoka?” Najbardziej narzucająca się odpowiedź na to pytanie brzmi: „to zależy od…”. Docierając do tego miejsca Czytelnik prawdopodobnie ma już świadomość, jak wiele czynników wpływa na wysokość jego raty. Część z tych czynników w pewnym stopniu zależy od instytucji udzielającej kredyt, a zatem na wysokość i – być może – brak konieczności uwzględnienia niektórych z tych czynników możemy mieć wpływ zanim dojdzie do podpisania formalnej umowy o kredyt. Zatem w momencie podpisywania ostatecznej wersji warto spróbować wynegocjować wysokość niektórych składowych raty (wysokość oprocentowania, marży, prowizji, itp.) z kredytodawcą.

SŁOWNICZEK POJĘĆ

dyskontowanie – wyznaczanie wartości pieniądza na dziś, gdy znamy jego wartość w przyszłości (operacja odwrotna do oprocentowania);

j.p. – jednostka pieniężna, w której wyrażono wartość kapitału, inwestycji, renty, itp.;

kapitalizacja odsetek – dopisywanie odsetek do kapitału;

kredytobiorca – ubiegający się o kredyt;

kredytodawca – udzielający kredytu lub pożyczki w formie pieniężnej;

marża kredytowa – zazwyczaj stały element raty kredytowej, której wysokość uzależniona jest m.in. od wysokości zaciąganego kredytu, czasu trwania kredytu, itp. lub określona jako wartość stała zdefiniowana w umowie o kredyt;

okres bazowy (renty) – okres pomiędzy kolejnymi płatnościami (renty), zazwyczaj jeden rok;

oprocentowanie – wynagrodzenie wypłacane kredytodawcy przez kredytobiorcę w zamian za możliwość korzystania przez kredytobiorcę z kapitału będącego własnością kredytodawcy (operacja odwrotna do dyskontowania);

procent prosty (odsetki proste) – odsetki od kapitału nie są doliczane do kapitału w kolejnym okresie (odsetki naliczane proporcjonalnie do czasu trwania inwestycji, która podlega oprocentowaniu);

procent składany (odsetki złożone) – odsetki od kapitału są doliczane do kapitału w następnym okresie i podlegają w nim oprocentowaniu;

prowizja – zazwyczaj jednorazowa opłata pobierana w związku z uruchomieniem kredytu na jego początku;

rata kredytu – okresowa płatność złożona z części odsetkowej i/lub kapitałowej spłacającej dług;

renta prosta – ciąg stałych systematycznych płatności równoodległych w czasie, dla której okres bazowy pokrywa się z okresem kapitalizacji odsetek;

renta uogólniona – ciąg płatności, dla której okres bazowy nie pokrywa się z okresem kapitalizacji odsetek;

RRSO – rzeczywista roczna stopa oprocentowania kredytu, która powinna zawierać wszystkie obciążenia związane z udzielanym i spłacanym kredytem;

stopa procentowa – parametr decydujący o wysokości wynagrodzenia (odsetek) w zamian za wypożyczenie kapitału w ustalonym okresie;

strumień płatności – ciąg płatności dokonywany w ustalonych momentach;

schemat amortyzacji (długu) – plan spłaty kredytu z zastosowaniem odpowiedniej metody do obsługi spłaty i wyznaczenia wysokości rat,

wartość obecna (PV, present value) – wartość kapitału przeliczona z ustalonego momentu w przyszłości na chwilę obecną (zazwyczaj wiąże się z procesem dyskontowania);

wartość przyszła (FV, future value) – wartość kapitału przeliczona na ustalony moment w przyszłości (zazwyczaj wiąże się z procesem oprocentowania).

SŁOWNICZEK SYMBOLI

$a_{\overline{n}|r}$ – wartość obecna n-okresowej renty oprocentowanej r w okresie bazowym i płacącej 1 jednostkę pieniężną (j.p.) na koniec okresu bazowego;

$a_{\overline{n}|}^{(m)}$ – wartość obecna n-okresowej renty oprocentowanej $r^{(m)}$ i płacącej m-krotnie w okresie bazowym;

$\ddot{a}_{\overline{n}|r}$ – wartość obecna n-okresowej renty oprocentowanej r w okresie bazowym i płacącej 1 j.p. na początek okresu bazowego;

$a_{\overline{\infty}|r}$ – wartość obecna renty płacącej w nieskończoność (renta wieczysta);

r_{ef} – efektywna stopa procentowa podawana dla okresu bazowego i uwzględniająca ewentualne konwersje wewnątrz tego okresu;

$s_{\overline{n}|r}$ – wartość końcowa renty oprocentowanej r w okresie bazowym o n ratach płatnych w wysokości 1 j.p. na koniec okresu;

$s_{\overline{n}|}^{(m)}$ – wartość końcowa n-okresowej renty oprocentowanej $r^{(m)}$ i płacącej m-krotnie w okresie bazowym;

$\ddot{s}_{\overline{n}|r}$ – wartość końcowa renty oprocentowanej r w okresie bazowym o n ratach płatnych w wysokości 1 j.p. na początek okresu;

$\ddot{s}_{\overline{n}|(m)}$ – wartość końcowa renty n-okresowej oprocentowanej $r^{(m)}$ i płacącej m-krotnie w okresie bazowym.

LITERATURA

Bijak W., et al., „Matematyka finansowa: teoria i praktyka obliczeń finansowych", Bizant, Warszawa, 1994;

Jakubowski J., et al., „Matematyka finansowa, instrumenty pochodne", WNT, Warszawa, 2003;

Jaworski P., Micał J., „Modelowanie matematyczne w finansach i ubezpieczeniach", Poltext, Warszawa, 2005;

Kellison S. G., „The Theory of Interest", third edition MacGraw-Hill, Irwin, 2009;

Piasecki K., Ronka-Chmielowiec W., „Matematyka finansowa", Wydawnictwo C.H. Beck, 2011;

Podgórska M., Klimkowska J. „Matematyka finansowa", PWN, Warszawa, 2005;

Smaga E., „Arytmetyka finansowa", PWN, Warszawa, 2010.

Komisja Nadzoru Finansowego
Pl. Powstańców Warszawy 1
Skr. poczt. nr 419, 00-950 Warszawa 1
Tel. (+48) 22 262 50 00
Fax (+48) 22 262 51 11
knf@knf.gov.pl
www.knf.gov.pl

ISBN 978-83-63380-09-0